KAPITTEL 1

Vektorer i $\mathbb{R}^n$

1. Vektorer

DEFINISJON. (i) *Elementene i* $\mathbb{R}^n$ er ordnede n-tuppel $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ av elementer i $\mathbb{R}$.

Vi identifiserer elementene $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$, enten med radvektoren $[u_1 u_2 \cdots u_n]$ og/eller kolonnevektoren $\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

La $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$, og la c være $\mathbb{R}$.

(ii) Da er $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ *like* hvis

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2, \ldots, u_n = v_n,$$

dvs. $u_i = v_i$ for all $i = 1, 2, \ldots, n$.

(iii)

$$\mathbb{u} + \mathbb{v} \overset{\text{def}}{=} (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n),$$

$$c\mathbb{u} \overset{\text{def}}{=} (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n).$$

PROPOSISJON 1. *La* $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ *og* $\mathbb{w}$ *være i* $\mathbb{R}^n$*, og la* $c, d \in \mathbb{R}$*. Da er:*

(a) $(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} = \mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w})$ *(addisjon er assosiativ).*

(b) *Det fins et entydig element* $\mathbb{0}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{0} = \mathbb{u} = \mathbb{0} + \mathbb{u}$$

for all $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *(nemlig* $\mathbb{0} = (0, 0, \ldots, 0)$*).*

(c) *Gitt* $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$*, så fins det* $\mathbb{u}'$ *i* $\mathbb{R}^n$ *slik at*

$$\mathbb{u} + \mathbb{u}' = \mathbb{0} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}$$

(nemlig $\mathbb{u}' = (-1)\mathbb{u}$*).*

(d) $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$.

(e) $a(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = a\mathbb{u} + a\mathbb{v}$.

(f) $(a + b)\mathbb{u} = a\mathbb{u} + b\mathbb{u}$.

(g) $a(b\mathbb{u}) = (ab)\mathbb{u}$.

(h) $1\mathbb{u} = \mathbb{u}$ *for all* $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$.

KOROLLAR 2. *La* $\mathbb{u}$ *være i* $\mathbb{R}^n$ *og* a *i* $\mathbb{R}$*. Da er:*

(a) $0\mathbb{u} = \mathbb{0}$.

(b) $a\mathbb{0} = \mathbb{0}$.

(c) $(-1)\mathbb{u} = -\mathbb{u}$.

2. Lengde

DEFINISJON. *Lengden* (normen) $\|\mathbb{u}\|$ av en vektor $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ i $\mathbb{R}^n$ er gitt ved

$$\|\mathbb{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}.$$

PROPOSISJON 3. *For en vektor* $\mathbb{u}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *og* $c \in \mathbb{R}$*, så er*

(a) $\|\mathbb{u}\| \geq 0$.
(b) $\|\mathbb{u}\| = 0$ *hvis og bare hvis* $\mathbb{u} = \mathbb{0}$.
(c) $\|a\mathbb{u}\| = |a|\,\|\mathbb{u}\|$.

MERK. Spesielt i (c): For $\mathbb{u} \neq \mathbb{0}$, så er

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\mathbb{u} \right\| = |\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}|\,\|\mathbb{u}\| = \frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\,\|\mathbb{u}\| = 1,$$

og $\frac{1}{\|\mathbb{u}\|}\mathbb{u}$ kalles *normaliseringen av* $\mathbb{u}$. En vektor med lengde 1 kalles en *enhetsvektor*.

3. Skalarprodukt

Husk: Hvis $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er to ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^2$ eller $\mathbb{R}^3$ og θ er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$, da er *skalarproduktet av* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$, betegnes med $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$, definert som

$$\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} \stackrel{\text{def}}{=} \|\mathbb{u}\|\,\|\mathbb{v}\|\cos\theta.$$

Hvis $\mathbb{u}$ eller $\mathbb{v}$ er $\mathbb{0}$, så er $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = 0$.

Har lært: $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = u_1v_1 + u_2v_2$ (i $\mathbb{R}^2$).

Spørsmål: Hvorfor?

Bruk at projeksjonen av et lukket vektorpolygon (en sum av vektorer som er nullvektoren) inn på en fast retning (vektor) er lik null.

DEFINISJON. For $\mathbb{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ og $\mathbb{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{R}^n$ så defineres *skalarproduktet* $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}$ av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ som

$$\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n.$$

PROPOSISJON 4. *For vektorer* $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ *og* $\mathbb{w}$ *i* $\mathbb{R}^n$ *og* a *i* $\mathbb{R}$ *har vi:*

(a) $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = \mathbb{v}\cdot\mathbb{u}$.
(b) $\mathbb{u}\cdot(\mathbb{v}+\mathbb{w}) = \mathbb{u}\cdot\mathbb{v} + \mathbb{u}\cdot\mathbb{w}$.
(c) $a(\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}) = (a\mathbb{u})\cdot\mathbb{v} = \mathbb{u}\cdot(a\mathbb{v})$.
(d) $\mathbb{u}\cdot\mathbb{u} \geq 0$, *og* $\mathbb{u}\cdot\mathbb{u} = 0$ *hvis og bare hvis* $\mathbb{u} = \mathbb{0}$.
(e) $\mathbb{0}\cdot\mathbb{u} = 0 = \mathbb{u}\cdot\mathbb{0}$.

TEOREM 5 (Cauchy-Schwarz ulikhet). *For to vektorer* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$ *i* $\mathbb{R}^n$*, så er*

$$|\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}| \leq \|\mathbb{u}\|\,|\,\|\mathbb{v}\|\,,$$

dvs.

$$|u_1v_1 + u_2v_2 + \cdots + u_nv_n| \leq \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

DEFINISJON. *Vinkelen* θ *mellom to ikke-null vektorer* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^n$ defineres som

$$\theta = \cos(\frac{\mathbb{u}\cdot\mathbb{v}}{\|\mathbb{u}\|\,\|\mathbb{v}\|}),$$

der $0 \leq \theta \leq \pi$.

DEFINISJON. To vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er *ortogonale* hvis $\mathbb{u}\cdot\mathbb{v} = 0$.

PROPOSISJON 6. *For* $\mathbb{u}$ *og* $\mathbb{v}$ *i* $\mathbb{R}^n$*, så er*

$$\|\mathbb{u}+\mathbb{v}\| \leq \|\mathbb{u}\| + \|\mathbb{v}\|\,.$$

4. Lineære likningssystem

DEFINISJON. (i) En *lineær likning med n ukjente* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ er en likning som kan uttrykkes

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \tag{1}$$

der a_1, a_2, ..., a_n er *koeffisienter* (konstanter) i $\mathbb{R}$ og ikke alle a_1, a_2, ..., a_n er lik null. Hvis $b = 0$, så er likningen *homogen.*

(ii) Et endelig antall lineære likninger kalles et *system av lineære likninger*/et *lineært likningssystem.*

(iii) En *løsning av* (1) er et n-tuppel $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ slik at s_1 innsatt for x_1, s_2 innsatt for x_2, osv. gjør at (1) er tilfredsstilt.

Elementære radoperasjoner:

(I) Multipliserer en likning med en konstant $\neq 0$.
(II) To likninger bytter plass.
(III) Legger et multiplum av en likning til en annen.

Gauss-eliminasjon:

Steg 1: I første ikke-null kolonne fra venstre, ved eventuell ombytting av rader, fremskaff en ikke-null koeffisient på rad 1, multipliser med inversen til denne. (Dette gir en *ledende ener/pivot*).
Steg 2: Fjern koeffisienter $\neq 0$ under ledende ener.
Steg 3: Gjenta Steg 1–2 på radene 2 og nedover.
Steg 4: Gjenta Steg 3 på de nye undersystemene til systemet til systemet får en *trappeform*

$$\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & & & & & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & & & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & * \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Gauss-Jordan-eliminasjon:

Steg 5: Fremskaff 0 over de ledende enerne, start fra bunnen.

DEFINISJON. En totalmatrise til et system av m lineære likninger med n ukjente er på *redusert trappeform* hvis den er av formen

$$\begin{bmatrix}
1 & * & \cdots & 0 & * & * & 0 & & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & 0 & & \cdots & * & * \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & 0 & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & & & & & & \cdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & & & & & & & \cdots & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

Tallet 1 i siste rad kan være i siste kolonne. Ett-tallene i alle kolonner unntatt den siste svarer til *ledende ukjente.* En ukjent som ikke er ledende er *fri.*

5. Matriser og matriseoperasjoner

DEFINISJON. En *matrise* er en rektangulær tabell med tall. Tallene i matrisen kalles *elementene* i matrisen. En matrise deles inn i *rader* og *kolonner*, og *størrelsen* til en matrise er $m \times n$, der

$$m = \#\text{rader}$$

og

$$n = \#\text{kolonner}.$$

DEFINISJON. To matriser $A = [a_{ij}]$ og $B = [b_{ij}]$ er *like* hvis A og B har

(i) samme størrelse,
(ii) elementene er de samme, dvs. $a_{ij} = b_{ij}$ for all i og j.

DEFINISJON. (a) *Summen* av to matriser er kun definert for to matriser av samme størrelse. Git to matriser A og B av samme størrelse, da er $A + B$ gitt ved at

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

for alle i og j.

(b) Gitt en matrise $A = [a_{ij}]$ og en skalar c i $\mathbb{R}$, så er produktet cA gitt ved at

$$(cA)_{ij} = ca_{ij}$$

for alle i og j.

(c) En matrise hvor alle elementene i matrisen er null kalles en *nullmatrise.*

Notasjon. Når vi skal definere produktet av to matriser, bruker vi oppdeling av matriser i rader og kolonner.

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \hline \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbb{r}_1(A) \\ \hline \mathbb{r}_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbb{r}_m(A) \end{array}\right]$$

$$A = \left[\begin{array}{c|c|ccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{array}\right] = \left[\mathbb{c}_1(A) \mid \mathbb{c}_2(A) \mid \cdots \quad \cdots \mid \mathbb{c}_n(A)\right]$$

$\mathbb{r}_i(A)$ er rad nummer i i A, mens $\mathbb{c}_i(A)$ er kolonne nummer i i A.

DEFINISJON. *Produktet av to matriser A og B* er kun definert når

$$\#\text{kolonner i } A = \#\text{rader i } B,$$

dvs. A er en $m \times t$-matrise og B er en $t \times n$-matrise.

Gitt dette, så er $A \cdot B$ følgende $m \times n$-matrise

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \left[\begin{array}{c} \mathbb{r}_1(A) \\ \hline \mathbb{r}_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbb{r}_m(A) \end{array}\right] \left[\mathbb{c}_1(A) \mid \mathbb{c}_2(A) \mid \cdots \quad \cdots \mid \mathbb{c}_n(A)\right] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbb{r}_1(A)\mathbb{c}_1(B) & \mathbb{r}_1(A)\mathbb{c}_2(B) & \cdots & \cdots & \mathbb{r}_1(A)\mathbb{c}_n(B) \\ \mathbb{r}_2(A)\mathbb{c}_1(B) & \mathbb{r}_2(A)\mathbb{c}_2(B) & \cdots & \cdots & \mathbb{r}_2(A)\mathbb{c}_n(B) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \mathbb{r}_m(A)\mathbb{c}_1(B) & \mathbb{r}_m(A)\mathbb{c}_2(B) & \cdots & \cdots & \mathbb{r}_m(A)\mathbb{c}_n(B) \end{bmatrix} \\ &= [\mathbb{r}_i(A)\mathbb{c}_j(B)] \end{aligned}$$

Notasjon. En $n \times n$-matrise $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$ der alle elementene av diagonalen er null og elementene på diagonalen er 1, kalles en *identitetsmatrise* og betegnes med I_n.

LEMMA 7. *Hvis*

$$[A|\mathbb{b}] = \left[\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} & & b_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \cdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} & & b_m \end{array}\right]$$

er totalmatrisen til et lineært likningssystem med ukjente $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$*, da kan likningssystemet uttrykkes som*

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b}$$

der $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ *og* $\mathbb{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$.

PROPOSISJON 8. *I det følgende anta at størrelsen av de involverte matrisene* A, B *og* C *er slik at alle operasjonene er definert. Følgende holder:*

(a) $A + (B + C) = (A + B) + C$ *(addisjon er assosiativ).*
(b) *Det fins nøyaktig en matrise* 0 *slik at*

$$A + 0 = A = 0 + A$$

for alle matriser A *av en gitt størrelse (nemlig nullmatrisen).*
(c) *Gitt en matrise* A*, så fins det en matrise* A' *slik at*

$$A + A' = 0 = A' + A$$

(nemlig, $A' = -A = (-1)A$*).*
(d) $A + B = B + A$ *(addisjon er kommutativ).*
(e) $c(A + B) = cA + cB$.
(f) $(c + d)A = cA + dA$.
(g) $c(dA) = (cd)A$.
(h) $1 \cdot A = A$.
(i) $A(BC) = (AB)C$ *(multiplikasjon er assosiativ).*
(j) $A(B + C) = AB + AC$ *(venstre distributiv lov).*
(k) $(A + B)C = AC + BC$ *(høyre distributiv lov).*
(l) *For alle* $m \times n$*-matriser* A *så er*

$$A = I_m A = A I_n.$$

5.1. Invers av en matrise.

DEFINISJON. En matrise A er *invertibel* (ikke-singulær) hvis det eksisterer en matrise B og en $n \geq 1$ slik at

$$AB = I_n = BA.$$

B kalles en *invers* til A. Hvis en slik B ikke eksisterer, kalles A for *singulær*.

MERK. Det følger av definisjonen at en invertibel matrise er en kvadratisk matrise.

PROPOSISJON 9. *Hvis B og C er inverser til en invertibel matrise A, så er $B = C$.*

PROPOSISJON 10. *Hvis A og B er invertible matriser av samme størrelse, da er AB invertibel og*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

PROPOSISJON 11. *Hvis A er en invertibel matrise og n et ikke-negativt heltall, da er:*

(a) *A^{-1} er invertibel, og $(A^{-1})^{-1} = A$.*
(b) *A^n er invertibel, og $(A^n)^{-1} = A^{-n} \stackrel{\text{def}}{=} (A^{-1})^n$.*
(c) *cA er invertibel for all ikke-null skalarer c og*

$$(cA)^{-1} = c^{-1}A^{-1}.$$

5.2. Elementære matriser.

DEFINISJON. En $n \times n$-matrise kalles en *elementær matrise* hvis den fremkommer fra I_n ved en elementær radoperajson.

LEMMA 12. *Hvis en elementær $m \times m$-matrise E er fremkommet med en bestemt elementær radoperasjon på I_m og A er en $m \otimes n$-matrise, så er produktet EA fremkommet fra A med den samme elementære radoperasjonen.*

PROPOSISJON 13. *Enhver elementær matrise er invertibel, og inversen er også en elementær matrise.*

KOROLLAR 14. *La A være en $m \times n$-matrise og betrakt likningssystemet $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ for en $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^m$. La $[R|\mathbb{b}']$ være redusert trappeform av $[A|\mathbb{b}]$. Da har $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ og $R\mathbb{x} = \mathbb{b}'$ samme løsningsmengde.*

TEOREM 15. *Gitt et lineært likningssystem $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ med n ukjente og m likninger.*

(a) *Anta at $\mathbb{b} \neq 0$. Da er systemet løsbart hvis og bare hvis $0 \cdots 01$ ikke opptrer i redusert trappeform av systemet.*
(b) *Anta at systemet er løsbart. Da er følgende ekvivalent*
   (i) *ingen frie ukjente,*
   (ii) *nøyaktig en løsning,*
   (iii) *redusert trappeform er av formen*

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & * \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

og følgende ekvivalent
   (i) *minst en fri ukjent,*
   (ii) *∞ mange løsninger.*

KOROLLAR 16. *Gitt et lineært likningssystem $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ med n ukjente og m likninger som er løsbart og $n > m$. Da har systemet $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ uendelig mange løsninger.*

TEOREM 17. *La A være en $n \times n$-matrise.*

(a) *Følgende er ekvivalent*
   (i) *A er invertibel,*
   (ii) *det lineære likningssystemet $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ har kun en løsning,*
   (iii) *redusert trappeform er $[I_n|0]$.*
(b) *A er invertibel hvis og bare hvis A er et endelig produkt av elementære matriser.*

5.3. Transponerte matriser.

DEFINISJON. Den *transponerte matrisen* av en $m \times n$-matrise $A = [a_{ij}]$ er en $n \times m$-matrise A^T der

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}$$

dvs. i-te rad i A blir i-te kolonne i A^T.

DEFINISJON. En (kvadratisk) matrise A med egenskapen $A = A^T$ kalles *symmetrisk*.

PROPOSISJON 18. *La A og B være matriser av "rett størrelse". Da holder følgende:*
(a) $(A^T)^T = A$.
(b) $(A + B)^T = A^T + B^T$.
(c) $(cA)^T = cA^T$, *for c i $\mathbb{R}$.*
(d) $(AB)^T = B^T A^T$.

KOROLLAR 19. *Hvis A er en invertibel matrise, da er A^T også invertibel og*

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

6. Vektorrom

DEFINISJON. En mengde V med to binære operasjoner

$$- + -: V \times V \to V, (\mathbb{u}, \mathbb{v}) \mapsto \mathbb{u} + \mathbb{v}$$

and

$$- \cdot -: \mathbb{R} \times V \to V, (a, \mathbb{u}) \mapsto a\mathbb{u}$$

som tilfredsstiller
(1) $(\mathbb{u} + \mathbb{v}) + \mathbb{w} = \mathbb{u} + (\mathbb{v} + \mathbb{w})$ for alle $\mathbb{u}, \mathbb{v}, \mathbb{w}$ i V.
(2) Det eksisterer $\mathbb{0}$ i V slik at for alle $\mathbb{u}$ i V så er

$$\mathbb{u} + \mathbb{0} = \mathbb{u} = \mathbb{0} + \mathbb{u}.$$

(3) For alle $\mathbb{u}$ i V, så eksisterer $\mathbb{u}'$ i V slik at

$$\mathbb{u} + \mathbb{u}' = \mathbb{0} = \mathbb{u}' + \mathbb{u}.$$

(4) $\mathbb{u} + \mathbb{v} = \mathbb{v} + \mathbb{u}$ for alle $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ i V.
(5) $c(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = c\mathbb{u} + c\mathbb{v}$ for alle $\mathbb{u}, \mathbb{v}$ i V og c i $\mathbb{R}$.
(6) $(c + d)\mathbb{u} = c\mathbb{u} + d\mathbb{v}$ for alle $\mathbb{u}$ i V og c, d i $\mathbb{R}$.
(7) $c(d\mathbb{u}) = (cd)\mathbb{u}$ for alle $\mathbb{u}$ i V og c, d i $\mathbb{R}$.
(8) $1 \cdot \mathbb{u} = \mathbb{u}$.

kalles et *vektorrom over* $\mathbb{R}$.

PROPOSISJON 20. *La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$, og la $\mathbb{u}$ være i V og c i $\mathbb{R}$. Da holder følgende.*
(a) $0 \cdot \mathbb{u} = \mathbb{0}$.
(b) $c \cdot \mathbb{0} = \mathbb{0}$.
(c) $(-1) \cdot \mathbb{u} = -\mathbb{u}$.
(d) *Hvis $c\mathbb{u} = \mathbb{0}$, så er $c = 0$ eller $\mathbb{u} = \mathbb{0}$.*

DEFINISJON. En delmengde W av et vektorrom V kalles et *underrom av V* hvis W er et vektorrom under addisjon og skalar multiplikasjonen gitt i V.

PROPOSISJON 21. *La V være et vektorrom over $\mathbb{R}$, og la W være en ikke-tom delmengde av V. Da er W et underrom av V hvis og bare hvis*
(i) *Hvis $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er i W, så er $\mathbb{u} + \mathbb{v}$ også i W.*
(ii) *Hvis c er i $\mathbb{R}$ og $\mathbb{u}$ i W, så er $c\mathbb{u}$ også i W.*

La

$$R(A) = \{a_1\mathbb{r}_1(A) + a_2\mathbb{r}_2 + \cdots + a_m\mathbb{r} \mid a_i \in \mathbb{R}\}$$

og

$$C(A) = \{a_1\mathbb{c}_1(A) + a_2\mathbb{c}_2 + \cdots + a_n\mathbb{c} \mid a_i \in \mathbb{R}\}.$$

TEOREM 22. *La A være en $m \times n$-matrise, og la $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^m$. Da gjelder følgende.*

(a) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *er løsbar hvis og bare hvis* $\mathbb{b}$ *i* $C(A)$.

(b) *La*

$$\mathcal{L} = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{b}\}$$

og

$$\mathcal{L}_0 = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \mathbb{0}\}.$$

Hvis $A\mathbb{x}_p = \mathbb{b}$, *så er*

$$\mathcal{L} = \{\mathbb{x}_p + \mathbb{x}_0 \mid \mathbb{x}_0 \in \mathcal{L}_0\} = \mathbb{x}_p + \mathcal{L}_0.$$

(c) *Anta at* $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *er løsbar. Da er følgende ekvivalent.*
  (i) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *har nøyaktig en løsning.*
  (ii) $N(A) = \{\mathbb{0}\}$.

I tillegg er følgende ekvivalent.
  (i) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *har* ∞ *mange løsninger.*
  (ii) $N(A) \neq \{\mathbb{0}\}$.

DEFINISJON. La V være et vektorrom, og la $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t$ være i V. Vektorene $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ kalles *lineært uavhengig* hvis alle $\mathbb{x}$ i $\operatorname{LinSpan}\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ kan skrives entydig som

$$\mathbb{x} = a_1\mathbb{u}_1 + a_2\mathbb{u}_2 + \cdots + a_t\mathbb{u}_t,$$

med a_i i $\mathbb{R}$ for $i = 1, 2, \ldots, t$.

KOROLLAR 23. *La V være et vektorrom, og la $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t$ være i V. Da er følgende ekvivalent.*

(a) $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ *er lineært uavhengig.*

(b) $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ *har nøyaktig en løsning, hvor* $A = \big[\mathbb{u}_1|\mathbb{u}_2|\cdots|\mathbb{u}_t\big]$.

(c) *Hvis*

$$a_1\mathbb{u}_1 + a_2\mathbb{u}_2 + \cdots + a_t\mathbb{u}_t = \mathbb{0},$$

så er $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = 0$.

DEFINISJON. La V være et vektorrom, og la $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t$ være i V. Vektorene $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ kalles en *basis for V* hvis

(i) $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ er lineært uavhengig.
(ii) $\operatorname{LinSpan}\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\} = V$.

TEOREM 24. *La V være et vektorrom som har en endelig basis. Da har enhver basis for V det samme antall elementer.*

DEFINISJON. *Dimensjonen til et vektorrom V* er antall vektorer i en basis V. Vi skriver $\dim V$ for dimensjonen til V.

LEMMA 25. *La $\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t$ være elementer i et vektorrom V, slik at* $V = \operatorname{LinSpan}\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$. *Da er en delmengde av* $\{\mathbb{u}_1, \mathbb{u}_2, \ldots, \mathbb{u}_t\}$ *en basis for V. Spesielt er* $\dim V \leq t$.

LEMMA 26. *La A være en $m \times n$-matrise med redusert trappeform* $\operatorname{Red}(A)$. *Da har vi følgende.*

(a) $R(A) = R(\operatorname{Red}(A))$.
(b) $\dim R(A) = \dim R(\operatorname{Red}(A)) = \#$ *ledende ukjente.*
(c) $\dim N(A) + \dim R(A) = n$.

LEMMA 27. *La A være en $m \times n$-matrise, og la E være en invertibel matrise. Da er*

$$\dim C(A) = \dim C(EA).$$

Spesielt er $\dim C(A) = \dim C(\mathrm{Red}(A))$.

TEOREM 28. *La A være en $m \times n$-matrise. Da er*

$$\dim R(A) = \dim C(A).$$

DEFINISJON. *Rangen til en matrise A* er

$$\mathrm{rang}(A) = \dim R(A) \qquad (= \dim C(A)).$$

TEOREM 29 (Nullitet + rang). *La A være en $m \times n$-matrise. Da er*

$$\dim N(A) + \mathrm{rang}(A) = n.$$

TEOREM 30. *La A være en $m \times n$-matrise. Da kan alle $\mathbb{x}$ i $\mathbb{R}^n$ skrives entydig som*

$$\mathbb{x} = \mathbb{x}_{null} + \mathbb{x}_{rad},$$

der $\mathbb{x}_{null}$ er i $N(A)$ og $\mathbb{x}_{rad}$ er i $R(A)$.

TEOREM 31. *La A være en $m \times n$-matrise. Følgende er ekvivalent.*
(a) $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *er løsbart for alle $\mathbb{b}$ i $\mathbb{R}^m$.*
(b) $\mathrm{rang}(A) = m$.

7. Determinanter

DEFINISJON. La A være en $n \times n$-matrise. Hvis $A = [a_{ij}]$ er en 1×1-matrise, så er *determinanten til A*, $\det(A) = a_{11}$. Ellers, hvis $n > 1$, så er

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} A_{i1}$$

hvor A_{ij} er *(i, j)-kofaktoren assosiert med A*, dvs.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$$

der M_{ij} er $(n-1) \times (n-1)$-matrisen som fremkommer fra A ved å stryke rad i og kolonne j. (M_{ij} kalles en *minor av A*).

7.1. Determinanter og elementære radoperasjoner.

LEMMA 32. *La A, B og C være tre $n \times n$-matriser der*

$$\mathbb{r}_i(A) = \mathbb{r}_i(B) = \mathbb{r}_i(C), \text{ for } i \neq t$$

og

$$\mathbb{r}_t(C) = \mathbb{r}_t(A) + \mathbb{r}_t(B)$$

Da er $\det(C) = \det(A) + \det(B)$.

PROPOSISJON 33. *La A være en kvadratisk matrise.*
(a) *La B være matrisen en får fra A ved å multiplisere t-te rad med c. Da er* $\det(B) = c\det(A)$.
(b) *La B være matrisen A hvor to rader har bytted plass. Da er* $\det(B) = -\det(A)$.
(c) *La B være matrisen A hvor c ganger rad nummer j i A er lagt til rad nummer i i A. Da er* $\det(B) = \det(A)$.

KOROLLAR 34. *Hvir $E_I(c)$, E_{II} og $E_{III}(c)$ er elementære matriser av type* (I), (II) *og* (III), *henholdsvis, så er*
(a) $\det(E_I(c)) = c$.
(b) $\det(E_{II}) = -1$.

(c) $\det(E_{III}(c)) = 1$.

Proposisjon 35. *Hvis A og E er $n\times n$-matriser med E en elementær matrise, så er*

$$\det(EA) = \det(E)\det(A).$$

Korollar 36. *Hvis A og E_1, E_2, ..., E_t er $n\times n$-matriser med E_1, E_2, ..., E_t elementære matriser, så er*

$$\det(E_1E_2\cdots E_tA) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_t)\det(A).$$

Proposisjon 37. *Hvis $A = [a_{ij}]$ er en øvre eller nedre triangulær $n\times n$-matrise, så er*

$$\det(A) = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Teorem 38. *En kvadratisk matrise A er invertibel hvis og bare hvis $\det(A) \neq 0$.*

Teorem 39. *For to $n\times n$-matriser A og B er*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Korollar 40. *Hvis A er invertibel, så er*

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Proposisjon 42. *For en kvadratisk matrise A er $\det(A^T) = \det(A)$.*

7.2. Kofaktor- og adjungert matrise til en matrise.

Definisjon. La $A = [a_{ij}]$ være en $n\times n$-matrise. Da kalles matrisen

$$\mathrm{Kof}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

for *kofaktormatrisen til A*. Matrisen

$$\mathrm{adj}(A) = (\mathrm{Kof}(A))^T$$

kalles *den adjungerte matrisen til A*.

Teorem 43. *La A være en $n\times n$-matrise. Da er*

(a) $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)I_n$.
(b) *Hvis A er invertibel, så er $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$.*

7.3. Cramers regel.

Teorem 44. *La A være en invertibel $n\times n$-matrise. Da har $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ nøyaktig en løsning $\mathbb{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, der*

$$x_j = \frac{\det(C_j)}{\det(A)},$$

hvor C_j er matrisen A med j-te kolonne byttet ut med $\mathbb{b}$.

7.4. Vektorprodukt.

DEFINISJON. For to vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^3$ defineres *vektorproduktet* $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ ved at

(i) hvis $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ ikke er parallelle (spesielt $\mathbb{u}, \mathbb{v} \neq \mathbb{0}$), så er $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ er en vektor i $\mathbb{R}^3$ med følgende egenskaper:
  (1) $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ står vinkelrett på både $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.
  (2) $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$ utgjør et høyresystem.
  (3) $\|\mathbb{u} \times \mathbb{v}\| = \|\mathbb{u}\| \, \|\mathbb{v}\| \sin(\theta)$, der θ er vinkelen mellom $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.

(ii) hvis $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ er parallelle (spesielt, kan minst en av dem være lik $\mathbb{0}$), defineres $\mathbb{u} \times \mathbb{v} = \mathbb{0}$.

PROPOSISJON 45. *La $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$ og $c \in \mathbb{R}$. Da er*

(a) $\mathbb{w} \times (\mathbb{u} + \mathbb{v}) = \mathbb{w} \times \mathbb{u} + \mathbb{w} \times \mathbb{v}$.
(b) $c(\mathbb{u} \times \mathbb{v}) = (c\mathbb{u}) \times \mathbb{v} = \mathbb{u} \times (c\mathbb{v})$.

PROPOSISJON 46. *La $\mathbb{u} = (u_1, u_2, u_3)$ og $\mathbb{v} = (v_1, v_2, v_3)$ i $\mathbb{R}^3$. Da er*

$$\mathbb{u} \times \mathbb{v} = (\det(\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix}), -\det(\begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix}), \det(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}))$$
$$\stackrel{\text{def}}{=} \det(\begin{bmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix})$$

DEFINISJON. La $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ være vektorer i $\mathbb{R}^3$. Da kalles

$$\mathbb{w} \cdot (\mathbb{u} \times \mathbb{v})$$

det skalare triple vektorproduktet av vektorene $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$.

PROPOSISJON 47. (a) *Arealet A av et parallellogram utspent av vektorene $\mathbb{u} = (u_1, u_2)$ og $\mathbb{v} = (v_1, v_2)$ i $\mathbb{R}^2$ er gitt ved*

$$A = |\det(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix})|.$$

(b) *Volumet V av et parallellepiped utspent av $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ i $\mathbb{R}^3$ er gitt ved*

$$V = |\det(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix})|.$$

KOROLLAR 48. (a) *To vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^2$ er parallelle hvis og bare hvis* $\det(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix}) = 0$.

(b) *Tre vektorer $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$ i $\mathbb{R}^3$ ligger i det samme planet hvis og bare hvis*

$$\det(\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}) = 0.$$

8. Egenvektorer og egenverdier

DEFINISJON. La A være en $n \times n$-matrise. Hvis $\mathbb{x}$ er en ikke-null vektor i $\mathbb{R}^n$ slik at

$$A\mathbb{x} = \lambda \mathbb{x}$$

for en λ i $\mathbb{R}$, så kalles $\mathbb{x}$ en *egenvektor for A* og λ *den tilhørende egenverdien.*

PROPOSISJON 49. *La A være en $n \times n$-matrise. Da er λ er en egenverdi hvis og bare hvis* $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Definisjon. To $n \times n$-matriser A og B kalles *similære* hvis det eksisterer en invertibel matrise P slik at
$$B = P^{-1}AP.$$

Definisjon. En $n \times n$-matrise A er *diagonaliserbar* hvis A er similær til en diagonalmatrise.

Teorem 50. *La A være en $n \times n$-matrise. Følgende er ekvivalent.*

(a) *A er diagonaliserbar.*
(b) *A har n lineært uavhengige egenvektorer.*

Lemma 51. *La $B = [b_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise, der $b_{ij} = c_{ij}\lambda + c'_{ij}$ for all i og j. Da er $\det(B)$ et polynom i λ med høyst grad n.*

Lemma 52. *La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise. Da er*
$$\det(\lambda I_n - A) = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) \cdots (\lambda - a_{nn}) + g(\lambda),$$
der $g(\lambda)$ er et polynom i λ av høyst grad $n - 2$.

Teorem 53. *La $A = [a_{ij}]$ være en $n \times n$-matrise. Da er*
$$\begin{aligned} c(\lambda) &= \det(\lambda I_n - A) \\ &= \lambda^n - (a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_1\lambda + (-1)^n \det(A). \end{aligned}$$

Definisjon. La A være en $n \times n$-matrise med λ som egenverdi. Da kalles
$$E_\lambda = \{\mathbb{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbb{x} = \lambda\mathbb{x}\}$$
for *egenrommet for egenverdien* λ.

Teorem 54. *La A og B være similære $n \times n$-matriser. Da er*
$$\det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - B).$$

Definisjon. $c(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ er *det karakteristiske polynomet til A*, hvor A er en $n \times n$-matrise.

Proposisjon 55. *La A være en $n \times n$-matrise med egenverdier $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_t\}$ for A med $\lambda_i \neq \lambda_j$ for $i \neq j$. La $\mathcal{B}_i$ være basis for E_{λ_i} for $i = 1, 2, \ldots, t$. Da er $\cup_{i=1}^t \mathcal{B}_i$ lineært uavhengig.*

Korollar 56. *La A være en $n \times n$-matrise. Hvis A har n forskjellige egenverdier, så er A diagonaliserbar.*

8.1. Ortogonale matriser.

Definisjon. En $n \times n$-matrise A sies å være *ortogonal* hvis $A^{-1} = A^T$.

Definisjon. La $\mathcal{O} = \{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2, \ldots, \mathbb{x}_t\}$ være t vektorer i $\mathbb{R}^n$. Mengden $\mathcal{O}$ kalles en *ortogonal mengde* hvis $\mathbb{x}_i \cdot \mathbb{x}_j = 0$ for $i \neq j$, og $\mathcal{O}$ kalles *ortonormal mengde* hvis i tillegg $\|\mathbb{x}_i\| = 1$ for $i = 1, 2, \ldots, t$.

Proposisjon 57. *Følgende er ekvivalent for en $n \times n$-matrise A.*

(a) *A er ortogonal.*
(b) *Radvektorer i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$.*
(c) *Kolonnevektorer i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$.*

Proposisjon 58. *Følgende er ekvivalent for en $n \times n$-matrise A.*

(a) *A er ortogonal.*
(b) $\|A\mathbb{x}\| = \|\mathbb{x}\|$ *for alle $\mathbb{x}$ i $\mathbb{R}^n$.*
(c) $(A\mathbb{x}) \cdot (A\mathbb{y}) = \mathbb{x} \cdot \mathbb{y}$ *for alle $\mathbb{x}$ og $\mathbb{y}$ i $\mathbb{R}^n$.*

8.2. Ortogonal diagonalisering.

DEFINISJON. En $n \times n$-matrise A er *ortogonalt diagonaliserbar* hvis det eksisterer en ortogonal matrise P slik at

$$P^T AP = D$$

for en diagonalmatrise D.

TEOREM 59. *For en symmetrisk matrise A gjelder:*
(a) *Alle egenvektorene til A er reelle.*
(b) *Egenvektorer fra forskjellige egenrom er ortogonale.*

TEOREM 60. *La A være en reell $n \times n$-matrise med n reelle egenverdier. Da eksisterer en ortogonal matrise P slik at*

$$P^T AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

hvor λ_1, λ_2, …,λ_n er egenverdiene med multiplisitet for A.

TEOREM 61. *La A være en $n \times n$-matrise. Følgende er ekvivalent:*
(a) *A er ortogonalt diagonaliserbar.*
(b) *A har en ortonormal basis av egenvektorer.*
(c) *A er symmetrisk.*

9. Kjeglesnitt

Et kjeglesnitt fremkommer ved å snitte en kjegle ("to iskremkjekser satt mot hverandre") med et plan. De geometriske objektene som kan oppstå da er
(i) sirkel, for eksempel $x^2 + y^2 = 1$.
(ii) ellipse, for eksempel $\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$.
(iii) hyperbel, for eksempel $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$.
(iv) parabel, for eksempel $y = x^2$.
(v) en linje (degenerert tilfelle).
(vi) to kryssende linjer (degenerert tilfelle)

Kan vise at ethvert kjeglesnitt kan i $\mathbb{R}^2$ uttrykkes som

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

hvor ikke alle a, b og c er lik null.

Vi ønsker å klassifiserer gitte kjeglesnitt.

EKSEMPEL 1. Betrakt likningen $x^2 + 4x + y^2 - 2y - 4 = 0$. Vi lager komplette kvadrater:

$$(x + 2)^2 - 4 + (y - 1)^2 - 1 - 4 = 0.$$

Dette gir likningen

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

Hvis vi setter $x' = x + 2$ og $y' = y - 1$, så blir likningen overført til

$$(x')^2 + (y')^2 = 3^2,$$

som er en sirkel med radius 3. Hva har vi gjort? Jo, vi har flyttet origo fra $(0, 0)$ til $(-2, 1)$, siden når $(x', y') = (0, 0)$ så er $(x, y) = (-2, 1)$.

Generelt, gitt likningen

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

så kan denne overføres til en likning av formen

$$(*) \quad a'(x')^2 + c(y')^2 + f' = 0,$$

ved å flytte origo.

Gjenstående problem: Hvordan behandle likninger av formen

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

der $b \neq 0$. Vi skal redusere dette til $(*)$ over. Ser først på

$$Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

La $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ og $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$. Da er

$$\begin{aligned} \mathbb{x}^T A \mathbb{x} &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ax + by \\ bx + cy \end{bmatrix} \\ &= ax^2 + bxy + bxy + cy^2 = Q(x, y) \end{aligned}$$

Siden A er symmetrisk, så medfører Theorem 61 at A er ortogonalt diagonaliserbar. Dermed eksisterer det en ortogonal matrise P slik at

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

for λ_1 og λ_2 i $\mathbb{R}$. La

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\mathbb{x}'.$$

Da er

$$\mathbb{x}^T = (P\mathbb{x}')^T = (\mathbb{x}')^T P^T.$$

Innsatt over får vi:

$$\begin{aligned} Q(x, y) &= (\mathbb{x}')^T P^T A P \mathbb{x}' \\ &= (\mathbb{x}')^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbb{x}' \\ &= \begin{bmatrix} x' & y' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 (x')^2 + \lambda_2 (y')^2 \end{aligned}$$

Vi ser: Kryssleddet xy er borte! og vi har redusert til $(*)$ over med $b = 0$.

EKSEMPEL 2. La $Q(x, y) = 9x^2 + 4xy + 6y^2 + 8\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y = 0$ være et kjeglesnitt. Klassifiser dette kjeglesnittet.

La $A = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (dvs. $a = 9$, $2b = 4$, $c = 6$).

Matrisen P. Egenverdiene til A:

$$\begin{aligned}\det(\lambda I_2 - A) &= \det(\begin{bmatrix}\lambda-9 & -2\\ -2 & \lambda-6\end{bmatrix})\\ &= (\lambda-9)(\lambda-6)-(-2)^2\\ &= \lambda^2-15\lambda+50 = (\lambda-10)(\lambda-5)\end{aligned}$$

Egenverdiene til A: $\lambda_1 = 10$ og $\lambda_2 = 5$.

Egenvektorene til A: $\lambda_1 = 10$:

$$\begin{aligned}(10I_2 - A)\mathbb{x} = \mathbb{0} &\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ -2 & -4 & 0\end{array}\right)\\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c}1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{array}\right)\\ &\sim x = 2y\\ &\sim \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = y\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}, y \neq 0\end{aligned}$$

$\lambda_2 = 5$:

$$\begin{aligned}(5I_2 - A)\mathbb{x} = \mathbb{0} &\sim \left(\begin{array}{cc|c}-4 & -2 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{array}\right)\\ &\sim \left(\begin{array}{cc|c}0 & 0 & 0\\ -2 & -1 & 0\end{array}\right)\\ &\sim y = -2x\\ &\sim \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} = x\begin{bmatrix}1\\ -2\end{bmatrix}, x \neq 0\end{aligned}$$

Valg av egenvektorer: Velg enhetsvektorer $\mathbb{x}_1$ og $\mathbb{x}_2$ slik at $\{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2\}$ danner et høyrehåndssystem (dvs. $\mathbb{x}_1 \times \mathbb{x}_2$ peker opp av planet, husk $\mathbb{x}_1 \times \mathbb{x}_2 = (0, 0, \det(\begin{bmatrix}\mathbb{x}_1\\ \mathbb{x}_2\end{bmatrix})))$.

Velg

$$\mathbb{x}_1 = \frac{1}{\|(2,1)\|}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$$

og

$$\mathbb{x}_2 = \frac{1}{\|(-1,2)\|}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$$

Matrisen $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$. Da er

$$P^T A P = P^{-1} A P = \begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix}$$

og hvis $\mathbb{x}' = \begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}$, så er for $\mathbb{x} = P\mathbb{x}'$:

$$\begin{aligned}(P\mathbb{x}')^T A P\mathbb{x}' &= (\mathbb{x}')^T P^T A P\mathbb{x}'\\ &= \begin{bmatrix}x' & y'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}\\ &= 10(x')^2 + 5(y')^2\end{aligned}$$

Hva skjer? Vi har satt

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\mathbb{x}',$$

dvs. skiftet referansesystem fra x og y til x' og y'.

$(1,0)$ i (x',y')-systemet svarer til $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1) = \mathbb{x}_1$ i (x,y)-systemet.

$(0,1)$ i (x',y')-systemet svarer til $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2) = \mathbb{x}_2$ i (x,y)-systemet.

Dette svarer til en rotasjon av koordinatsystem med ca. $26,6$ grader.

Omforming av $Q(x,y)$: Når vi har

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2x' - y' \\ x' + 2y' \end{bmatrix},$$

dvs. $x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y')$ og $y = \frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y')$, får vi at

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 = 10(x')^2 + 5(y')^2$$

og

$$\begin{aligned} Q(x,y) &= 10(x')^2 + 5(y')^2 + 8\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(2x' - y') + 4\sqrt{5}\frac{1}{\sqrt{5}}(x' + 2y') = 0 \\ &= 10(x')^2 + 5(y')^2 + 16x' - 8y' + 4x' + 8y' = 0 \\ &= 10(x')^2 + 5(y')^2 + 20x' = 0 \\ &= 10(x'+1)^2 - 10 + 5(y')^2 = 0 \mid \cdot \frac{1}{10} \\ &\sim (x'+1)^2 + (\frac{y'}{\sqrt{2}})^2 = 1 \end{aligned}$$

Sett $x'' = x' + 1$ og $y'' = y'$ (dette svarer til en forflytning av origo) gir likningen

$$(x'')^2 + (\frac{y''}{\sqrt{2}})^2 = 1.$$

Dette svarer til en ellipse med halvakser 1 og $\sqrt{2}$.

10. Lineære transformasjoner

Definisjon. *En lineær transformasjon* $T\colon V \to W$ mellom to vektorrom V og W over $\mathbb{R}$ er en funksjon $T\colon V \to W$ slik at

(i) $T(\mathbb{u} + \mathbb{v}) = T(\mathbb{u}) + T(\mathbb{v})$.
(ii) $T(c\mathbb{u}) = cT(\mathbb{u})$.

for all $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ og c i $\mathbb{R}$.

Proposisjon 62. *Alle lineære transformasjoner $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er gitt ved en $m \times n$-matrise A slik at $T(\mathbb{u}) = A\mathbb{u}$.*

Definisjon. En lineær transformasjon $T\colon V \to W$ er*en-til-en* (1-1) hvis for alle $\mathbb{u} \neq \mathbb{v}$ i V, så er $T(\mathbb{u}) \neq T(\mathbb{v})$ i W.

Proposisjon 63. *Følgende er ekvivalent for en lineær transformasjon $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.*

(a) *T er* 1-1.
(b) *Hvis $\mathbb{u} \neq \mathbb{0}$ i $\mathbb{R}^n$, så er $T(\mathbb{u}) \neq \mathbb{0}$ i $\mathbb{R}^m$.*
(c) *Hvis $T(\mathbb{u}) = \mathbb{0}$ i $\mathbb{R}^m$, så er $\mathbb{u} = \mathbb{0}$ i $\mathbb{R}^n$.*
(d) *Hvis $A = m^{\mathcal{S}_m}_{\mathcal{S}_n}(T)$ er standardmatrisen til T, så har $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ kun en løsning, dvs. $N(A) = \{\mathbb{0}\}$.*

Definisjon. (i) En lineær transformasjon $T\colon V \to W$ er *på* (onto) hvis for all w i W, så eksisterer det $\mathbb{v}$ i V slik at $T(\mathbb{v}) = \mathbb{w}$.

(ii) Mengden $\{T(\mathbb{v}) \mid \mathbb{v} \in V\}$ kalles *bildet av* T.
(iii) T er en *isomorfi* hvis T er 1-1 og på.

PROPOSISJON 64. *La* $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *være en lineær transformasjon med tilhørende matrise* $A = m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_n}(T)$. *Følgende er ekvivalent:*

(a) T *er* 1-1 *og på.*
(b) T *er på.*
(c) T *er* 1-1.

hvor hver av punktene i det ovenstående er ekvivalent til tilsvarende merkede punkt under:

(a') A *er invertibel.*
(b') $A\mathbb{x} = \mathbb{b}$ *er løsbar for all* $\mathbb{b}$ *i* $\mathbb{R}^n$.
(c') $A\mathbb{x} = \mathbb{0}$ *har nøyaktig en løsning.*

10.1. Bytte av basis. La $\mathcal{B} = \{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_n\}$j være en basis for $\mathbb{R}^n$. For $\mathbb{x}$ i $\mathbb{R}^n$ så er

$$\mathbb{x} = x_1\mathbb{b}_1 + x_2\mathbb{b}_2 + \cdots + x_n\mathbb{b}_n$$

for noen x_i i $\mathbb{R}$. Vi lar $(\mathbb{x})^{\mathcal{B}}$ betegne *koordinatvektoren av* $\mathbb{x}$ *med hensyn til basisen* $\mathcal{B}$ gitt ved $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Spesielt så har vi $\mathbb{x} = (\mathbb{x})^{\mathcal{S}_n}$.

Spørsmål: Hvordan komme fra $(\mathbb{x})^{\mathcal{B}}$ til $(\mathbb{x}')^{\mathcal{B}'}$?

La $P = [\mathbb{b}_1|\mathbb{b}_2|\cdots|\mathbb{b}_n]$ være matrisen hvor vektorene $\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2$,..., $\mathbb{b}_n$ utgjør henholdsvis kolonne 1, 2, osv. Vi betegner denne matrisen med $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n}$. Da er

$$P(\mathbb{x})^{\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n}(\mathbb{x})^{\mathcal{B}} = \mathbb{x} = (\mathbb{x})^{\mathcal{S}_n}.$$

Da er $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n}$ overgangsmatrisen fra basisen $\mathcal{B}$ til standardbasisen $\mathcal{S}_n$.

LEMMA 65. *La* $\mathcal{B}$ *og* $\mathcal{B}'$ *være to basiser for* $\mathbb{R}^n$.

(a) *Da er overgangsmatrisen fra basisen* $\mathcal{B}$ *til* $\mathcal{B}'$ *gitt ved*

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = (P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}_n})^{-1}P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n}.$$

(b) *Da er overgangsmatrisen fra basisen* $\mathcal{B}'$ *til* $\mathcal{B}$ *gitt ved*

$$P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n})^{-1}P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{S}_n} = (P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1}.$$

10.2. Ny tolkning av diagonalisering. La A være en $n \times n$-matrise. Anta at A har n lineært uavhengige egenvektorer $\{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2, \ldots, \mathbb{x}_n\}$ med tilhørende egenverdier λ_1, λ_2, ..., λ_n. Da har vi sett at

$$P = [\mathbb{x}_1|\mathbb{x}_2|\cdots|\mathbb{x}_n]$$

er slik at

$$P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & * & \cdots & * \\ \vdots & & & & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Siden $\mathcal{B} = \{\mathbb{x}_1, \mathbb{x}_2, \ldots, \mathbb{x}_n\}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$, så er

$$P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n}$$

og

$$P^{-1} = P_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{B}}.$$

Har at $A = m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_n}(A)$, slik at

$$P^{-1}AP = P_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{B}} m_{\mathcal{S}_n}^{\mathcal{S}_n}(A) P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{S}_n} = m_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(A) = D.$$

Dette gir at D er matrisen til lineær transformasjonen gitt av A med hensyn på basisen $\mathcal{B}$.

11. Komplekse tall

La $z = a + bi$ for a og b i $\mathbb{R}$, der $i^2 = -1$. Den *kompleks konjugerte* være gitt ved $\overline{z} = a - bi$.

PROPOSISJON 66. *La z og z' være komplekse tall.*

(a) $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
(b) $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
(c) $\overline{z^{-1}} = \overline{z}^{-1}$ *når* $z \neq 0$.
(d) $\overline{\overline{z}} = z$.

De Moivres formel: $(cos\theta + i \sin\theta)^n = cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$.

Eulers formel: $e^{i\theta} \overset{\text{def}}{=} cos\theta + i \sin\theta$.

PROPOSISJON 67. *La z og z' være komplekse tall. Da er*

(a) $|\overline{z}| = |z|$.
(b) $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$.
(c) $|\frac{1}{z}| = \frac{1}{|z|}$.
(d) $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.