Løsningsforslag eksamen i MA1201, høst 2017

Oppgave 1 Totalmatrise

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \quad -3 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 15 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 1 \quad -5 \\ \\ \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot -\frac{1}{12} \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ -2 \quad -3 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -3x_3 \\ x_3 = x_3 \\ x_4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_3 \\ -3x_3 \\ x_3 \\ 0 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_3 \in \mathbb{R}$$

Alle løsningene av det homogene likningssystemet er $\{a(-2,-3,1,0) \mid a \in \mathbb{R}\}$.

(b) Verdiene $(2,-2,0,3)$ innsatt i likningssystemet gir:

$$2-(-2)-0+3 = 2+2+3 = 7$$
$$-2+2\cdot(-2)+4(0)+3 = -2-4+3 = -3$$
$$3\cdot 2+2(-2)+12\cdot 0+3 = 6-4+3 = 5$$

Konstantleddet i likningssystemet er $(7,-3,5)$, slik at $(2,-2,0,3)$ er en løsning av det inhomogene likningssystemet.

Oppgave 2

a) $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \det\left(\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}\right) = (1\cdot 0 - 1\cdot 3, -(4\cdot 0 - 1\cdot 1), 4\cdot 3 - 1\cdot 1)$

$= \underline{(-3, 1, 11)}$

Arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \sqrt{-3^2 + 1^2 + 11^2} = \sqrt{9+1+121} = \underline{\underline{\sqrt{131}}}$

b) Arealet A av trekanten utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er halvparten av arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$, dvs. $A = \frac{1}{2}\sqrt{131}$.

Vektoren $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ er en vektor som står ortogonalt på planet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$. Projeksjonen av $\mathbf{w}$ ned på normalvektoren til planet utspent av $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er høyden h i tetraederet: En normalvektor er $\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|} = \mathbf{n}$. Da er

$$h = \mathbf{n}\cdot\mathbf{w} = \|\mathbf{n}\|\|\mathbf{w}\|\cos\theta(\mathbf{n},\mathbf{w})$$
$$= \|\mathbf{w}\|\cos\theta(\mathbf{n},\mathbf{w})$$

der $\theta(\mathbf{n},\mathbf{w})$ er vinkelen mellom $\mathbf{n}$ og $\mathbf{w}$.
Dette gir

$$V = \frac{1}{3}A\cdot h = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cancel{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}\right)\left(\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\cancel{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}}\cdot\mathbf{w}\right) = \frac{1}{6}(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$$

$$= \frac{1}{6}(-3,1,11)(1,1,4) = \frac{-3+1+44}{6} = \underline{\underline{7}}$$

Utvikle langs første rad.

Oppgave 3 a)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & t-6 & t-6 \\ t+1 & t & t \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & t-6 & t-12 \\ t+1 & t & 2t+1 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} t-6 & t-12 \\ t & 2t+1 \end{bmatrix}\right)$$

$$= (t-6)(2t+1) - t(t-12) = \underline{t^2+t-6}$$

Vi har at $\det(A(t)) = t^2+t-6 = (t-3)(t+2)$. ~~Dette~~ Dette gir at for $t \neq 3, -2$ så er $\det(A(t)) \neq 0$ og for $t = 3$ eller -2, så er $\det(A(t)) = 0$. Når $t \neq 3, -2$ så er $A(t)$ invertibel, da sier teorien at $A(t)x = 0$ har nøyaktig én løsning. Når $t = 3$ eller -2, så er $A(t)$ ikke invertibel og da sier teorien at $A(t)x = 0$ har uendelig mange løsninger.

b) Allerede svart på i a) angående når A er invertibel.

La $t = 1$. Vi løser likningssystemet

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} 6 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -11 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 5 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 5 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot \frac{1}{4} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ \\ \cdot -3 \quad 1 \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{11}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{array}\right]$$

Dette gir

$$\underline{\underline{A(1)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \\ 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{11}{4} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}}}$$

Oppgave 4 $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

a) $\det(\lambda I_2 - S) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda-3 & -1 \\ -1 & \lambda-3 \end{bmatrix}\right)$
$= (\lambda-3)^2 - 1 = 0$

gir egenverdiene når $(\lambda-3)^2 = 1$, dvs.
$\lambda - 3 = \pm 1$, som gir $\lambda = 3 \pm 1$, og egenverdier
$\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 2$.

$\lambda_1 = 4$ $(4I_2 - S)\mathbf{x} = \mathbf{0} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$

$\sim x - y = 0$, dvs. $x = y$ og $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y \end{bmatrix} = y\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Gir egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ med egenverdi 4

$\lambda_2 = 2$: $(2I_2 - S)\mathbf{x} = \mathbf{0} \sim \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array} \sim \begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$

$\sim y = -x$, dvs. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Gir egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ med egenverdi 2.

b)(i) Fordi egenvektorer som hører til forskjellige egenverdier er lineært uavhengig.
(ii) Siden S er en symmetrisk matrise, så er S ortogonalt diagonaliserbar som gir at S har 2 lineært uavhengige egenvektorer.
(iii) Siden S er en symmetrisk matrise, så er egenvektorer som hører til forskjellige egenvektorer ortogonale. Siden egenvektorer ikke er $\mathbf{0}$, så er de lineært uavhengige.

La $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ og $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$. Da er $\{x_1, x_2\}$ en ortonormal mengde av egenvektorer for S ~~med~~ egenverdier 4 og 2, hhv. La $P = [x_1 \; x_2]$. Teorien sier da at hvis $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ så blir

$$3x^2+2xy+3y^2 = [x \;\; y]\,S\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = [x' \;\; y']\,P^TSP\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$$

$$= 4(x')^2+2(y')^2$$

Så vårt valg for A er S og $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

Dette gir

$$\underbrace{3x^2+2xy+3y^2}+4\sqrt{2}x+4\sqrt{2}y = 0$$

$$4(x')^2+2(y')^2+\cancel{4\sqrt{2}}\left(\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}(x'-y')\right)+\cancel{4\sqrt{2}}\left(\cancel{\tfrac{1}{\sqrt{2}}}(x'+y')\right)=0$$

$$4(x')^2+2(y')^2+4x'-\cancel{4y'}+4x'+\cancel{4y'}=0$$

$$4[(x')^2+2x'] + 2(y')^2 = 0$$

$$4[(x'+1)^2-1] + 2(y')^2 = 0 \quad \Big| \cdot \tfrac{1}{4}$$

$$(x'+1)^2+\frac{(y')^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

La $x'' = x'+1$ og $y'' = y'$, så blir likningen $(x'')^2+\frac{(y'')^2}{\sqrt{2}^2}=1$, som er likningen for en ellipse.

Oppgave 5

a) $P\mathbf{u}\cdot P\mathbf{v} = (P\mathbf{u})^T P\mathbf{v}$
$$= \mathbf{u}^T P^T P \mathbf{v}$$
$$= \mathbf{u}^T I_3 \mathbf{v} \quad \text{, siden } P \text{ er ortogonal}$$
$$= \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}.$$

Dette viser (ii). Spesielt for $\mathbf{v}=\mathbf{u}$, så får vi $\|P\mathbf{u}\|^2 = P\mathbf{u}\cdot P\mathbf{u} = \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} = \|\mathbf{u}\|^2$ og dermed at $\|P\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$. og påstanden i (i) er vist.

La $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ være to ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^3$. Siden P er en invertibel matrise, så er $P\mathbf{u}$ og $P\mathbf{v}$ også to ikke-null vektorer (hvis $P\mathbf{u}=\mathbf{0}$, så er $\mathbf{0} = P^{-1}(P\mathbf{u}) = (P^{-1}P)\mathbf{u} = I_3\mathbf{u} = \mathbf{u}$, selvmotsigelse)
Fra (ii) har vi

$$P\mathbf{u}\cdot P\mathbf{v} = \|P\mathbf{u}\|\|P\mathbf{v}\|\cos\alpha(P\mathbf{u},P\mathbf{v})$$
$$(*) \quad \|$$
$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

Fra (i) har vi $\|P\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u}\|$ og $\|P\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v}\|$ og begger er forskjellig fra 0 pr. antakelse. Å dele likheten $(*)$ med $\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$ gir da
$$\cos\alpha(P\mathbf{u},P\mathbf{v}) = \cos\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}),$$
Siden $\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v})$ og $\alpha(P\mathbf{u},P\mathbf{v})$ ligger mellom 0 og π, så må $\alpha(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \alpha(P\mathbf{u},P\mathbf{v})$.

b) La $\mathbf{u},\mathbf{v}$ og $\mathbf{w}$ være ortogonale vektorer som utspenner C. Da er $\mathrm{Vol}(C) = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\|$. Vektorene $T_p(\mathbf{u}), T_p(\mathbf{v})$

og $T_p(w)$ vil fra a) være parvis ortogonale og de utspenne den rettvinklede terningen $T_p(C)$. Da er

$$\begin{aligned} Vol(T_p(C)) &= \|T_p(u)\|\,\|T_p(v)\|\,\|T_p(w)\| \\ &= \|Pu\|\,\|Pv\|\,\|Pw\| \\ &= \|u\|\,\|v\|\,\|w\| = Vol(C) \end{aligned}$$

fra a). Dette viser påstanden.