NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: ??

Tlf: 73 5? ?? ??

Eksamensdato: ??. august 2014

Eksamenstid (fra–til): ??.00–1?.00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Formelliste følger vedlagt eksamensoppgavene.

Alle svar skal begrunnes. Det skal være med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 Finn ligningen for tangentplanet til flaten $x^2 + z^2 - e^{xy} - \sin z = 0$ i punktet $(1, 0, 0)$.

Oppgave 2 Gitt $z = f(x, y)$ der f er en deriverbar funksjon og $x = u^2 - v^2$, $y = v^2 - u^2$. Vis at

$$u\frac{\partial z}{\partial v} + v\frac{\partial z}{\partial u} = 0.$$

Oppgave 3 Begrunn at funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er kontinuerlig.

Oppgave 4 Bruk dobbeltintegral til å finne arealet omsluttet av kurven $r = 1 + \sin\theta$ (i polarkoordinater).

Oppgave 5 Anta at et fjell har form som en elliptisk paraboloide $z = c - ax^2 - by^2$, der a, b og c er positive konstanter, x og y er øst–vest og nord–sør koordinater på kartet, mens z er høyden over havet.

a) I hvilken retning stiger høyden mest i punktet $(1, 1)$?

b) Hvis en klinkekule slippes i $(1, 1, c - a - b)$, i hvilken retning vil den begynne å trille?

Oppgave 6 La $f(x, y) = 3x^2y - y^3 + x^4$.

a) Finn alle kritiske punkt til f og klassifiser disse som lokale maksimum, lokale minimum eller sadelpunkt.

b) Har f et globalt (absolutt) maksimum? Et globalt (absolutt) minimum?

Oppgave 7 Finn punktene på kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som er nærmest og lengst fra punktet $(2, 2, 1)$.

Oppgave 8 I denne oppgaven studerer vi de to flatene

$$S_1\colon \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=1, z\geq 0\}$$
$$S_2\colon \left\{(x,y,z) \,\middle|\, x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1, z\geq 0\right\}$$

som begge er orientert slik at normalvektoren til S_1 i $(0,0,1)$ og S_2 i $(0,0,2)$ er $\mathbf{k}$.

a) Begrunn at hvis $\mathbf{F}$ er et C^1 vektorfelt i $\mathbb{R}^3$, så er

$$\iint_{S_1} (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}.$$

b) Finn verdien av integralene når $\mathbf{F} = (-2y, x, e^{x^2+z})$.

Formelliste følger vedlagt på neste side.

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx}, \quad B = f_{xy} \quad C = f_{yy}$$

Variabelskifteformler:

$$dx\,dy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv, \qquad dx\,dy\,dz = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,\mathrm{d}v\,dw$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad dx\,dy\,dz = r\ dr\,d\theta\,dz$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad dx\,dy\,dz = \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Flateintegral:

$$dS = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,du\,dv$$

Spesialtilfelle: $dS = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,dx\,dy$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,dm, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,dm, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,dm$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$

Stokes' teorem: $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\partial W} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,dS = \iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\ dV$