MA1103
Flerdimensjonal analyse
Vår 2024

Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Løsningsforslag øving 12

$\boxed{1}$ Finn arealen av området avgrenset av ellipsen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ved å regne et linjeintegral.

Hint: Bruk teorem 11.3.2 fra boka.

løsning:

La D være det lukkede området avgrenset av ellipsen E. Om vi velger $\mathbf{F}(x, y) = (0, x)$ får vi at

$$\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial y} = 1,$$

og dermed at

$$\text{Areal}(D) = \iint_D dA = \oint_E \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r}.$$

Siden E er ellipsen gitt ved

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

kan vi parametrisere E ved $x = a\cos(\theta)$ og $y = b\sin(\theta)$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$. Vi merker oss at

$$\frac{dy}{d\theta} = b\cos(\theta),$$

som igjen gir

$$\text{Areal}(D) = \oint_E \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} ab\cos^2(\theta) d\theta = ab \int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} d\theta = ab\pi,$$

hvor vi brukte $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

$\boxed{2}$ Vi lar $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 y, -xy^2)$. Evaluer linjeintegralet

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r},$$

hvor C går **med** klokken langs halvsirkelen gitt ved $0 \le y \le \sqrt{9 - x^2}$.

Hint: Greens teorem.

Løsning:

La D være halvsirkelen $x^2+y^2 \leq 9$, $y \geq 0$. I polarkoordinater er D beskrevet av $0 \leq r \leq 3$ og $0 \leq \theta \leq \pi$.

La kurven $\tilde{C}$ være randen til D orientert mot klokken. Siden C er randen til D orientert med klokken får vi

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} = -\oint_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r},$$

og siden $\tilde{C}$ er orientert mot klokken følger det fra Greens teorem at

$$\begin{aligned}
\oint_C \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} = -\oint_{\tilde{C}} \mathbf{F} \cdot \, d\mathbf{r} & \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 y) \right) dA \\
&= \iint_D (y^2 + x^2)\, dA \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^3 r^2 \cdot r\, dr \right) d\theta \\
&= \frac{81}{4}\pi.
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Evaluer linjeintegralet

$$\oint_C \left(x \sin(y^2) - y^2\right) dx + \left(x^2 y \cos(y^2) + 3x\right) dy$$

hvor kurven C går mot klokken langs trapeset T med hjørner $(0,-2)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, og $(0,2)$.

Løsning: Siden C er en stykkevis glatt lukket kurve, og integranden er deriverbar kan vi bruke Greens teorem,

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx dy$$

I vårt tilfelle får vi

$$\begin{aligned}
&\oint_C \left(x \sin(y^2) - y^2\right) dx + \left(x^2 y \cos(y^2) + 3x\right) dy \\
=& \iint_T \left[2xy \cos(y^2) + 3 - \left(2xy\cos(y^2) - 2y\right) \right] dA \\
=& \iint_T (3 + 2y)\, dA \\
=& 3 \iint_T dA + 2 \iint_T y\, dA
\end{aligned}$$

Det første integralet er bare tre ganger arealet til T og er gitt ved $3\text{Area}(T) = 3\frac{(2+4)\times 1}{2} = 9$.

Vi ønsker nå å integrere over T, som er skissert i Figur 1. Vi kan merke oss at T er gitt ved $0 \leq x \leq 1$ og $-2 + x \leq y \leq 2 - x$. Dermed får vi

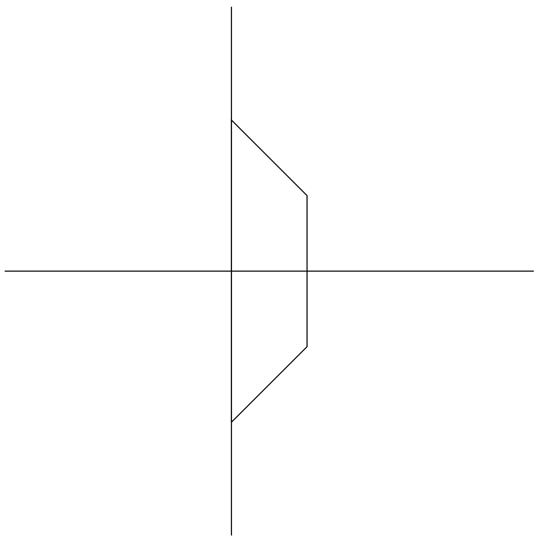
$$2 \iint_T y\, dA = 2 \int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} y\, dy dx = \int_0^1 (2-x)^2 - (x-2)^2\, dx = 0.$$

Om vi ønsker å regne ut det første integralet, ser vi at

$$3 \iint_T dA = 3 \int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} dy dx = 3 \int_0^1 2(2-x) dx = 12 - \frac{6}{2} = 9.$$

Vi får dermed at linjeintegralet er gitt ved

$$\oint_C \left(x \sin(y^2) - y^2 \right) dx + \left(x^2 y \cos(y^2) + 3x \right) dy = 3 \iint_T dA + 2 \iint_T y\, dA = 9.$$



Figur 1: Trapeset med hjørner $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, og $(0, 2)$.

$\boxed{4}$ La C være en enkel lukket kurve i planet som er orientert mot klokken og som omringer origo. Videre, la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} (-y, x), \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Bruk Greens teorem til å vise

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

OBS: $\mathbf{F}$ har et singulært punkt i origo, så vi kan ikke umiddelbart bruke Greens teorem.

løsning: La D være området avgrenset av kurven C. Vi ønsker å bruke Greens teorem til å heller integrere over D, D inneholder origo, et punkt der $\mathbf{F}$ ikke er definert. Dermed er ikke kravene til Greens teorem oppfylt. Vi kan løse dette ved å fjerne origo fra D. La $\varepsilon > 0$ og definer området D_ε ved å fjerne en ε-disk om origo fra D, det vil si

$$D_\varepsilon = D \backslash B(0, \varepsilon).$$

Vi kan nå merke at kravene til Greens teorem er oppfylt på D_ε, og at randen til D_ε er gitt av kurven C, orientert mot klokken, og sirkelen C_ε med radius ε orientert med klokken. Greens teorem gir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

La oss finne de partiellderiverte. For $F_1 = -y/(x^2 + y^2)$ får vi fra brøkregelen

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

og tilsvarende for $F_2 = x/(x^2 + y^2)$,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vi ser dermed at $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$, og dermed gir Greens teorem

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = 0, \quad \Longrightarrow \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Sirkelen C_ε kan parametriseres ved $x = \varepsilon \cos(\theta)$ og $y = \varepsilon \sin(\theta)$ for $\theta \in [0, 2\pi]$. Dette gir $dx = -\varepsilon \sin(\theta) d\theta$ og $dy = \varepsilon \cos(\theta) d\theta$. Vi får dermed at linjeintegralet er gitt ved

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_\varepsilon} \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2(\theta)}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\theta)}{\varepsilon^2} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

5 Anta at $V \subset \mathbb{R}^3$ er et lukket, begrenset område med stykkevis glatt rand, og at $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen som peker ut av V. La også $\mathbf{F}$ være et C^2-vektorfelt.

Vis at

$$\iint_{\partial V} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \, d\mathbf{S} = 0.$$

Løsning: Alle kravene for å bruke divergensteoremet er oppfylte, så vi har at

$$\iint_{\partial V} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \, d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) \, dxdydz.$$

Men vi vet fra forelesning at $\operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) = 0$, så vi får

$$\iint_{\partial V} \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \, d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{curl}(\mathbf{F})) \, dxdydz = \iiint_V 0 \, dxdydz = 0.$$

$\boxed{6}$ La $S \subset \mathbb{R}^3$ være sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, og la $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, e^{\sin(xy)} + 1)$. Regn ut

$$\iint_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S},$$

der $\mathbf{n}$ er enhetsnormalvektoren til S som peker utover.

Løsning: Kravene for å bruke divergensteoremet er oppfylte, så vi har at

$$\iint_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \iiint_B \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz,$$

der B er kula $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$. Vi har at

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 0 = 2.$$

Dermed er

$$\iint_S \mathbf{F}\, d\mathbf{S} = \iiint_B 2\, dxdydz = 2 \cdot \operatorname{vol}(B) = 2 \cdot \frac{4\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}.$$

Trippelintegralet går det også an å regne ut ved å bytte til kulekoordinater. Svaret vil bli det samme.

$\boxed{7}$ Anta at $V \subset \mathbb{R}^3$ være et lukket, begrenset område med stykkevis glatt rand, og at $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen som peker ut av V. Vi lar også $F(x, y, z) = (x, y, z)$.

a) Vis at volumet til V er gitt ved

$$\operatorname{vol}(V) = \frac{1}{3} \iint_{\partial V} F\, d\mathbf{S}.$$

b) Bruk a) til å regne ut volumet av en kjegle der grunnsirkelen har sentrum i origo og radius r, og der spissen er i punktet $(0, 0, h)$.

Løsning: a): Kravene for å bruke divergensteoremet er oppfylte, og vi har

$$\operatorname{div}(\mathbf{F})(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

Dermed er

$$\begin{aligned}\frac{1}{3} \iint_{\partial V} F\, d\mathbf{S} &= \frac{1}{3} \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\, dxdydz = \frac{1}{3} \iiint_V 3\, dxdydz \\ &= \iiint_V dxdydz = \operatorname{vol}(V).\end{aligned}$$

b):

La V være kjeglen med grunnflate $x^2 + y^2 \leq r^2, z = 0$, og spiss i $(0, 0, h)$. Randen til V består av to deler: Disken $x^2 + y^2 \leq r^2, z = 0$, som vi kaller S_1 og flaten $z = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}$, som vi kaller S_2. Tegn gjerne en skisse for å forsikre deg om at dette stemmer. Fra a) har vi dermed at

$$\text{vol}(V) = \frac{1}{3}\iint_{\partial V} F \, d\mathbf{S} = \frac{1}{3}\iint_{S_1} F \, d\mathbf{S} + \frac{1}{3}\iint_{S_2} F \, d\mathbf{S},$$

der $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Vi regner hvert flateintegral for seg selv, og vi starter med S_1. Merk først at dersom normalvektoren skal peke ut av V, må den peke nedover på S_1. Vi kan parametrisere S_1 ved

$$\gamma_1(u, v) = (u, v, 0),$$

der $u^2 + v^2 \leq r^2$. Vi kunne strengt tatt også parametrisert ved polarkoordinater, men som vi skal se er γ_1 faktisk nok for å løse oppgaven. Normalvektoren er åpenbart $(0, 0, -1)$, noe vi også kan sjekke ved partiellderivasjon. Vi får at

$$\mathbf{F}(\gamma_1(u, v)) \cdot \mathbf{n}_1 = (u, v, 0) \cdot (0, 0, -1) = 0,$$

og dermed er

$$\frac{1}{3}\iint_{S_1} F \, d\mathbf{S} = \frac{1}{3}\iint_{S_1} 0 \, d\mathbf{S} = 0.$$

S_2 er grafen til funksjonen $g(x, y) = h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2 + y^2}$, så vi kan bruke vanlig grafparametrisering:

$$\gamma_2(u, v) = \left(u, v, h - \frac{h}{r}\sqrt{u^2 + v^2}\right),$$

med $u^2 + v^2 \leq r^2$. Vi har også at

$$\mathbf{n}_2 = \left(-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1\right) = \left(\frac{h}{r}\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{h}{r}\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right).$$

Merk at normalvektoren peker oppover, slik den skal. Vi får at

$$\mathbf{F}(\gamma_2(u, v)) \cdot \mathbf{n}_2 = \left(u, v, h - \frac{h}{r}\sqrt{u^2 + v^2}\right) \cdot \left(\frac{h}{r}\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{h}{r}\frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1\right)$$

$$= \frac{h}{r}\frac{u^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + \frac{h}{r}\frac{v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + h - \frac{h}{r}\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{h}{r}\frac{u^2 + v^2}{\sqrt{u^2 + v^2}} + h - \frac{h}{r}\sqrt{u^2 + v^2}$$

$$= \frac{h}{r}\sqrt{u^2 + v^2} + h - \frac{h}{r}\sqrt{u^2 + v^2} = h.$$

Dermed er

$$\frac{1}{3}\iint_{S_2} F \, d\mathbf{S} = \frac{1}{3}\iint_{u^2 + v^2 \leq r^2} h \, d\mathbf{S} = \frac{h}{3}\text{Areal}(B(0, r)) = \frac{h}{3} \cdot \pi r^2 = \frac{\pi h r^2}{3}.$$

Alt i alt har vi derfor

$$\text{vol}(V) = 0 + \frac{\pi h r^2}{3} = \frac{\pi h r^2}{3},$$

som stemmer overens med den kjente formelen.