Velkommen til teoriforelesninger i Flerdimensonal analyse

med

Jørgen Endal

Vi fortsetter med: Integrasjon i flere enn to variabler (kap. 10.6, 15.5–15.6)

Forelesning uke 10

Nøkkelbegrep:

- Tolkning av trippelintegral som hypervolum under hyperflate
- Trippelintegraler er itererte integraler (Fubini-Tonelli)
- Uegentlige trippelintegraler
- Middelverdisetningen for trippelintegraler
- Variablebytte for trippelintegraler
- Sylinderkoordinater
- Sfæriske koordinater
- Integrasjon in høyere dimensjoner

Introduksjon

Eksempel

Finn arealet til området gitt ved

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Trippelintegraler (kap 15.5)

$$\iiint_D f(x,y,z)dV$$
$$= \text{hypervolumet mellom } D \text{ og hyperflata } \xi = f(x,y,z)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i.$$

Fysisk tolkning:

$$\iiint_D \rho(x,y,z)dV = \text{masse}.$$

Trippelintegraler (kap 15.5)

$$\iiint_D f(x, y, z)dV$$

Merk

- Kontinuerlige funksjoner er integrerbare.
- Trippelintegralet av kontinuerlige funksjoner kan evalueres som et iterert trippelintegral.
- Uegentlige integral og middelverdisetningen har analoge versjoner for trippelintegral.
- Variableskifte holder for trippelintegraler.

Trippelintegraler (kap 15.5)

Eksempel

La

$$I = \int_0^1 \int_y^1 \int_0^z f(x, y, z) dxdzdy.$$

Uttrykk I som et iterert integral hvor integrasjonsrekkefølgen er

$$dydzdx.$$

Vanlige variabelbytter for trippelintegraler (kap 15.6)

Kartesiske koordinater:

$$\begin{aligned}(x,y,z) = \mathbf{T}(x,y,z) &= \big(T_1(x,y,z), T_2(x,y,z), T_3(x,y,z)\big) \\ &= (x,y,z).\end{aligned}$$

Synlinerkoordinater:

$$\begin{aligned}(x,y,z) = \mathbf{T}(r,\theta,z) &= \big(T_1(r,\theta,z), T_2(r,\theta,z), T_3(r,\theta,z)\big) \\ &= \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta), z\big).\end{aligned}$$

Sfæriske koordinater:

$$\begin{aligned}(x,y,z) = \mathbf{T}(R,\phi,\theta) &= \big(T_1(R,\phi,\theta), T_2(R,\phi,\theta), T_3(R,\phi,\theta)\big) \\ &= \big(R\cos(\theta)\sin(\phi), R\sin(\theta)\sin(\phi), R\cos(\phi)\big).\end{aligned}$$

Integrasjon i høyere dimensjoner

Teorien er helt analog og man skriver generelt, for $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\int \int \cdots \int_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$
$$= \int_D f(x) dx.$$