Velkommen til teoriforelesninger i Flerdimensonal analyse

med
Jørgen Endal

Vi fortsetter med: Funksjoner av flere variabler, del 3 (kap. 13.6, 13.8–13.9)

Forelesning uke 6

Nøkkelbegrep:

- Middelverdisetningen og Taylors formel for funksjoner av flere variabler
- Implisitte funksjoner
- Jacobi- og Hesse-matrisene
- Implisitt funksjonsteorem

Interaktiv 4.3, finn feilen

Vi brukte middelverdisetningen på $u(x) = f(x, b)$.

Teorem (Sekant-/Middelverdisetningen)

La $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Anta at g er kontinuerlig på $[\alpha, \beta]$ og deriverbar (i form av grenseverdi) på (α, β).
Da finnes det en $\zeta \in (\alpha, \beta)$ slik at

$$g(\beta) - g(\alpha) = g'(\zeta)(\beta - \alpha).$$

Definisjon (Kontinuerlig deriverbar, C^1)

La $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ og la $x_0 \in U$ være et indre punkt.
Vi sier da at f er kontinuerlig deriverbar, eller $C^1(U; \mathbb{R})$, når:

- $f(x_0)$ er kontinuerlig for alle $x_0 \in U$.
- $\partial_{x_i} f(x_0)$ eksisterer for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ og alle $x_0 \in U$.
- $\partial_{x_i} f(x_0)$ er kontinuerlig for alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ og alle $x_0 \in U$.

Introduksjon

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (MA1101/MA1102 eller TMA4100)

$\mathbf{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (tidligere i emnet)

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (tidligere i emnet, og i dag)

$\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (i dag)

Taylors formel, Taylor-rekker og approksimasjoner (kap. 13.9)

Husk at for $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hadde vi:

Middelverdisetninga (f er kontinuerlig deriverbar)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c)h, \qquad c \in (x_0, x_0 + h).$$

Taylors formel (f sin andrederivert er kontinuerlig deriverbar)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(|h|^2).$$

Taylors formel, Taylor-rekker og approksimasjoner (kap. 13.9)

Husk at for $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ hadde vi:

Middelverdisetninga (f er kontinuerlig deriverbar)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c)h, \qquad c \in (x_0, x_0 + h).$$

Taylors formel (f sin andrederivert er kontinuerlig deriverbar)

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2}f''(x_0)h^2 + o(|h|^2).$$

Taylors formel, Taylor-rekker og approksimasjoner (kap. 13.9)

Teorem (Middelverdisetninga, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

La $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Anta at f er deriverbar i et område som inneholder linjestykket mellom vektorene $x_0, x_0 + h \in U$.
Da finnes det en $c \in U$ på linja mellom x_0 og $x_0 + h$ slik at

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \nabla f(c) \cdot h$$

Merk:
Deriverbar i x_0: $f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + o(|h|)$.

Taylors formel, Taylor-rekker og approksimasjoner (kap. 13.9)

Teorem (Taylors formel, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$)

La $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Anta at $x_0 \in \mathbb{R}^n$ og $\varepsilon > 0$ er slik at $B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$, og at $f \in C^2(B_\varepsilon(x_0); \mathbb{R})$.
Da har vi at

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \nabla f(x_0) \cdot h + \frac{1}{2}(Hf(x_0)h) \cdot h + o(|h|^2)$$

(for tilstrekkelige små $h \in \mathbb{R}^n$).

Merk:

- H er foreløpig ukjent, men den må være en slags annenderivert.
- C^2 betyr det man kanskje skulle tro: I tillegg til C^1, skal alle kombinasjoner av $\partial_{x_i}\partial_{x_j} f$ være kontinuerlige.
- Vi kan fortsette Taylor-utviklinga om vi har mer regularitet.

Taylors formel, Taylor-rekker og approksimasjoner (kap. 13.9)

En annen versjon av Taylors formel:

$$g(x_0 + h) = g(x_0) + g'(x_0)h + \frac{1}{2}g''(c), \qquad c \in (0, 1).$$

Implisitte funksjoner (kap. 13.8)

For kontinuerlig og injektiv $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ med $f'(x_0) \neq 0$, kunne vi vise at

$$\exists f^{-1} \qquad \text{nært} \qquad y_0 = f(x_0)$$

slik at

$$f^{-1}(f(x)) = x, \qquad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Sirkelen $x^2 + y^2 = 1$ kan ikke beskrives som grafen til en funksjon $y = f(x)$, men vi kan selvsagt la

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{1 - x^2} \qquad \text{med } x \in (-1, 1) \\ y_2 &= -\sqrt{1 - x^2} \qquad \text{med } x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

For enkelhets skyld sider vi da at funksjonene y_1, y_2 er implisitt definerte av ligninga $x^2 + y^2 = 1$.

Implisitte funksjoner (kap. 13.8)

Merk:

- Punktene $(\pm 1, 0)$ er unnlatt fordi der er tangenten vertikal:

  $$\frac{dy_1}{dx}\bigg|_{x=\pm 1} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\bigg|_{x=\pm 1} = \mp\infty,$$

  eller

  $$\partial_y f(x,y) = \partial_y(x^2+y^2-1) = 2y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \partial_y f(\pm 1, 0) = 0.$$

- Vi kan si at for alle x nærme a slik at $\partial_y f(a,b) \neq 0$, eksisterer en $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

  $$g(a) = b, \qquad f(x, g(x)) = 0, \qquad g'(x) = -\frac{\partial_x f(x,g(x))}{\partial_y f(x,g(x))}.$$

Implisitte funksjoner (kap. 13.8)

Man kan da selvsagt tenke seg situasjonen

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{F}(x_1, x_2, y_1, y_2) = (0, 0),$$

hvor $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ er definert ved

$$(x_1, x_2, y_1, y_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2, y_1, y_2), f_2(x_1, x_2, y_1, y_2)).$$

Kan vi uttrykke y_1, y_2 som funksjoner av x_1, x_2?

Vi trenger litt teori om funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Funksjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Jacobimatrisa:

$$D\mathbf{F}(x) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x) \\ \nabla F_2(x) \\ \vdots \\ \nabla F_m(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} F_1(x) & \cdots & \partial_{x_n} F_1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} F_m(x) & \cdots & \partial_{x_n} F_m(x) \end{bmatrix}$$