MA1103 Flerdimensjonal analyse

Våren 2023

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 3
Frist: 06.02.2023

Dette er øving 3. Du må ha 4 av de 6 første øvingene godkjent for å få tilgang til eksamen.

1 La $\mathbf{r}(t) = (t, \lambda t^2, t^3)$ være en parametrisert kurve for $t \in [0, T]$ og $\lambda \in \mathbb{R}$. For hvilken verdi av λ er lengden, $s(T)$, av kurven gitt ved $s(T) = T + T^3$?

2 Finn frenetrammen $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ til kurven gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k},$$

i punktet $(1/2, 1/4, 1/2)$. Her er

$$\mathbf{i} = (1,0,0) \quad \mathbf{j} = (0,1,0) \quad \mathbf{k} = (0,0,1)$$

standard basisvektorene i $\mathbb{R}^3$.

3 I hvert av de følgende tilfellene, sjekk om grenseverdien eksisterer. Finn grenseverdien i de tilfellene den eksisterer.

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{y}$.

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,\pi)} \frac{\cos(xy)}{1-x-\cos(y)}$.

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{2x^4+y^4}$.

4 Hvordan kan funksjonen

$$f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y}, \quad x \neq y,$$

bli definert langs linje $x = y$ slik at funksjonen er kontinuerlig i hele xy-planet.

5 Finn alle partiellderiverte av første ordens til funksjonene gitt nedenfor.

a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

b) $f(x, y, z) = x^3y^4z^5$.

c) $f(x, y, z) = \ln(1 + e^{xyz})$.

6 Vi definerer den følgende funksjonen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & x \neq y, \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

a) Finn de partiellderiverte av første ordens til funksjonen f.

b) Er funksjonen f kontinuerlig i punktet $(0, 0)$. Er noen av de partiellderiverte av første orden kontinuerlige i $(0, 0)$?

7 Vi ser på funksjonen

$$F(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq 0, \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Finn de partiellderiverte $F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$, $F_{xy}(x, y)$ og $F_{yx}(x, y)$ for $(x, y) \neq (0, 0)$. Finn også verdiene i $(0, 0)$. Merk at $F_{yx}(0, 0) = 2$ og $F_{xy}(0, 0) = -2$. Hvorfor motsier ikke dette teoremet om likhet mellom blandede partiellderiverte, (Teorem 1 på side 716 i Adams & Essex Calculus 10. utgave)?

Ekstra 1 Spesifiser definisjonsmengden til funksjonen

$$f(x, y) = \arcsin(x + y).$$

Ekstra 2 En funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ med kontinuerlige partiellderiverte av andre orden kalles for *harmonisk* dersom den oppfyller laplaceligning,

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

La $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være to funksjoner med kontinuerlige partiellderiverte av andre orden som oppfyller *Cauchy-Riemann*-ligningene,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Vis at u og v er harmoniske funksjoner.

Ekstra 3 La $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ være to vektorer i et (reelt) vektorrom V utstyrt med et indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$. La $S_\mathbf{v}$ være det lineære spennet til vektoren $\mathbf{v}$. Projeksjonen av $\mathbf{u}$ på $\mathbf{v}$, som vi betegner ved $P_\mathbf{v}(u)$, er det punktet i $S_\mathbf{v}$ som ligger nærmest $\mathbf{u}$.

a) Finn et uttrykk for $P_\mathbf{v}(\mathbf{u})$

b) La $V = \mathbb{R}^3$ utstyrt med det vanlige prikkproduktet. Finn $P_{(1,0,-2)}(1, 2, 3)$.