Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 13
Frist: 2.05.2023

Dette er øving 13. Denne øvingen skal kun leveres dersom du trenger en ekstra øving for å få øvingsopplegget godkjent. Øvingen skal leveres i Øving 13 - Bolk 1 dersom den skal telles blant øving 1-6 og Øving 13 - Bolk 2 for øving 7-12. Øvingen skal kun leveres en plass. Det tilbys ikke grundig retting for denne øvingen.

1 Finn arealen av området avgrenset av ellipsen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ved bruk av linjeintegral.

2 La C være en enkel lukket kurve i planet som er orientert mot klokken og som omringer origo. Videre, la F være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}\left(-y, x\right), \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Bruk Greens teorem til å vise

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

Hint: Hvorfor kan vi ikke anvende Greens teorem direkte?

3 La $U \subset \mathbb{R}^3$ være en open delmengde som inneholder et legeme $M \subset \mathbb{R}^3$ med rand ∂M som er en glatt og positive orientert overflate. La ν være den utoverpekende enhetnormalvektoren langs overflate ∂M. Anta at u og v er glatte reelle funksjoner definert U. Vis de såkalte Greens formlene,

(i)

$$\iiint_M \Delta u \, dV = \iint_{\partial M} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.$$

(ii)

$$\iiint_M \nabla u \cdot \nabla v \, dV = \iint_{\partial M} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS - \iiint_M u \Delta v \, dV.$$

(iii)

$$\iiint_M (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \iint_{\partial M} \left(u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)\, dS,$$

hvor $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ er laplaceoperatoren og den normalderiverte av u er gitt ved

$$\nabla u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Hint: Bruk divergensteoremet for et passende vektorfelt X.

4 La $\mathbf{F} : (x, y, z) \mapsto (xy^2, y, z)$. Bruk divergensteoremet til å beregne

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS,$$

hvor T er delen av sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ med $y \geq 0$ og $\mathbf{N}$ er den utoverpekende enhetsnormalvektoren på sfæren.

5 Bruk Stokes' teorem til å vise

$$\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \sqrt{3}\pi a^2,$$

hvor C er den negativt orienterte skjæringskurven mellom overflatene $x^2+y^2+z^2 = a^2$ og $x + y + z = 0$.

6 La L være skjæringskurven mellom overflatene gitt ved $(x - 1)^2 + 4y^2 = 16$ og $2x + y + z = 3$ orientert mot klokken sett ovenfra på z-aksen.

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F} = (z^2 + y^2 + \sin x^2)\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}.$$

Beregn

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$