Oppgåve 1 I kva retning veks $f(x, y, z) = (x^2 - y^2)\mathrm{e}^z$ raskast i punktet $(1, -1, 3)$?

Oppgåve 2 La

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - x^3y^3}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

Finn grenseverdien $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Oppgåve 3 Kurva $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2}t, \mathrm{e}^t, \mathrm{e}^{-t}), \qquad t \in [0, 1].$$

Vis at $|\mathbf{r}'(t)| = \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^t$, og finn bogelengda til kurva $\mathcal{C}$. Er $\mathbf{r}$ ei glatt (C^1) parametrisering av kurva $\mathcal{C}$?

Oppgåve 4 Finn og klassifisér dei kritiske punkta til funksjonen $f(x, y) = \sin(y)\mathrm{e}^{x^2}$.

Oppgåve 5 Det avgrensa området $D \subseteq \mathbb{R}^3$ er gjeve ved ulikskapane

$$\sqrt{2}x^2 + \sqrt{2}y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{3 - x^2 - y^2}.$$

Skissér området, og finn volumet av D.

Oppgåve 6 La $R > 1$. Ei flate $\mathcal{S}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(u, v) = \Big(\big(R + \cos(u)\big)\cos(v), \big(R + \cos(u)\big)\sin(v), \sin(u)\Big),$$

der $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Vis at normalvektoren til flata er gjeve ved

$$\big(R + \cos(u)\big)\big(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), -\sin(u)\big).$$

Rekn så ut overflatearealet til $\mathcal{S}$.

Hint: Du kan fritt bruke at $dS = |\frac{\partial}{\partial u}\mathbf{r}(u, v) \times \frac{\partial}{\partial v}\mathbf{r}(u, v)|\, du\, dv$.

Oppgåve 7 Kurva $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\sin(t), \cos(t), t), \qquad t \in [0, 2\pi],$$

og vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gjeve ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 - 2xy, 2xy - x^2, z^3)$.

Vis at $\mathbf{F} = \nabla f$ der f er eit skalarfelt. Rekn så ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

Oppgåve 8 Dei to $C^2(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}^3)$-vektorfeltene

$$\mathbf{E}(x,y,z,t) = (E_1(x,y,z,t), E_2(x,y,z,t), E_3(x,y,z,t))$$

og

$$\mathbf{B} = (B_1(x,y,z,t), B_2(x,y,z,t), B_3(x,y,z,t))$$

tilfredsstiller

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}, \quad \nabla\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \nabla\times\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E},$$

der $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$.

Vis at $\mathbf{E}$ og $\mathbf{B}$ oppfyller likningane $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E} = \Delta\mathbf{E}$ og $\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{B} = \Delta\mathbf{B}$.

Hint: Du kan fritt bruke at for eit vektorfelt $\mathbf{F} \in C^2(\mathbb{R}^4;\mathbb{R}^3)$ gjeld

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{F}) - \Delta\mathbf{F},$$

der $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, $\Delta = \nabla\cdot\nabla$ og $\Delta\mathbf{F} = (\Delta F_1, \Delta F_2, \Delta F_3)$.

Oppgåve 9 La $R > 0$ og $n \geqslant 1$. Vis at volumet til

$$B_R(0) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant R^2\right\}$$

er gjeve som $R^n\mathrm{Vol}(B_1(0))$, der $\mathrm{Vol}(B_1(0))$ er volumet til

$$B_1(0) = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leqslant 1\right\}.$$

Hint: Du kan fritt bruke at R^n er likt med determinanten til $n\times n$-diagonalmatrisa

$$\begin{bmatrix} R & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & R & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & R \end{bmatrix}.$$

Oppgåve 10 Bruk

- middelverdisetninga $f(b) - f(a) = \nabla f(c)\cdot(b-a)$ der $f : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, og
- Cauchy-Schwarz' ulikskap $|x\cdot y| \leqslant |x||y|$ der $x, y \in \mathbb{R}^m$

til å vise følgande teorem:

Teorem
La $m \geqslant 1$ og $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ vere deriverbar i eit område som inneheld linjestykket mellom punkta $a, b \in \mathbb{R}^m$. Då finst det punkt $c_1, c_2, \ldots, c_m$ på linjestykket frå a til b slik at

$$|\mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)| \leqslant |b-a|\sqrt{|\nabla F_1(c_1)|^2 + |\nabla F_2(c_2)|^2 + \ldots + |\nabla F_m(c_m)|^2},$$

der $\mathbf{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_m)$.