

- 1** Dette er en ukjent funksjon på delt forskrift. Vi bruker derfor definisjonene til de partiellderiverte for å regne dem ut:

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1-1}{h} = 0$$

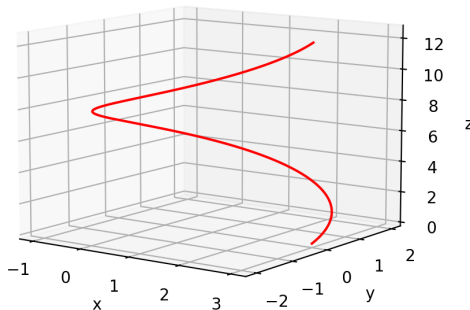
og

$$\partial_y f(0,0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{1-1}{k} = 0.$$

- 2** Når $t = 0$ får vi punktet $\mathbf{r}(0) = (a+1, 0, 0)$, og når $t = 2\pi$ punktet $\mathbf{r}(2\pi) = (a+1, 0, 2\pi b)$. Hvis $b = 0$, har vi $\mathbf{r}(t) = (a \cos(t) + 1, a \sin(t), 0)$ som tilfredsstiller ligninga

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2,$$

altså en sirkel med sentrum $(1, 0)$ og radius a . Siden $b > 0$, er \mathbf{r} en del av en helix som vist i figur 1.



Figur 1: En helix som starter i $(a+1, 0, 0)$ og slutter i $(a+1, 0, 2\pi b)$.

Vi deriverer \mathbf{r} komponentvis for å finne

$$\mathbf{r}'(t) = (-a \sin(t), a \cos(t), b) \quad \implies \quad |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(-a \sin(t))^2 + (a \cos(t))^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Dette gir

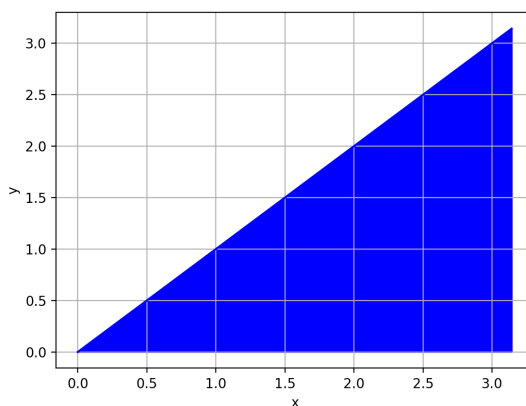
$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t\sqrt{a^2 + b^2} \quad \iff \quad t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Vi ender da opp med

$$\mathbf{r}(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) + 1, a \sin\left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right), b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right), \quad s \in [0, 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}].$$

- 3 Funksjonen $(x, y) \mapsto x \cos(x + y)$ er en sammensetning av kjente kontinuierlige funksjoner, og den er dermed kontinuierlig på \mathbb{R} . Vi kan derfor tolke dobbeltintegralet som et iterert integral. Vi kan da velge oss arealtvernsnitt som er vinkelrette på enten x - eller y -aksen. Her velger vi tverrsnitt som er vinkelrette på x -aksen siden disse gir minst regning. Fra figur 2, får vi da

$$\begin{aligned} \iint_R x \cos(x + y) dA &= \int_0^\pi \left(\int_0^x x \cos(x + y) dy \right) dx \\ &= \int_0^\pi \left[x \sin(x + y) \right]_{y=0}^{y=x} dx = \int_0^\pi (x \sin(2x) - x \sin(x)) dx \\ &= \left[x \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) \right]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi \left(-\frac{1}{2} \cos(2x) \right) dx - \left[x(-\cos(x)) \right]_{x=0}^{x=\pi} + \int_0^\pi (-\cos(x)) dx \\ &= -\frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$


 Figur 2: Integrasjonsområdet R .

- 4 Vi har at

$$f(x, y) = x + \ln(x^2 + y^2)$$

består av kjente partiellderiverbare funksjoner, og dermed er

$$\nabla f(x, y) = (\partial_x f(x, y), \partial_y f(x, y)) = \left(1 + \frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2} \right).$$

Snittet mellom tangentplanet i punktet $(-2, 2, f(-2, 2))$ og det vertikale planet $x = -2$ er ei rett linje med stigningstall $\partial_y f(-2, 2)$, og snittet mellom tangentplanet og det vertikale planet $y = 2$ er ei rett linje med stigningstall $\partial_x f(-2, 2)$. Linjene er respektivt parallelle med $\mathbf{T}_2 = (0, 1, \partial_y f(-2, 2))$ og $\mathbf{T}_1 = (1, 0, \partial_x f(-2, 2))$. Normalvektoren til planet er da

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_2 \times \mathbf{T}_1 = (\partial_x f(-2, 2), \partial_y f(-2, 2), -1).$$

Dette gir ligninga for planet som

$$0 = \mathbf{n} \cdot (x - (-2), y - 2, z - f(-2, 2)) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right) \cdot (x + 2, y - 2, z + 2 - \ln(8)),$$

eller

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - z = 2 - 3 \ln(2).$$

- 5 Vi legger først merke til at $f \in C^2$ gir at $\partial_{xy}^2 f = \partial_{yx}^2 f$ (Schwarz' teorem). For å klassifisere det kritiske punktet (x_0, y_0) bruker vi andrederiverttesten:

$$\begin{aligned} D &= \partial_x^2 f(x, y) \partial_y^2 f(x, y) - \partial_{xy}^2 f(x, y) \partial_{yx}^2 f(x, y) = (-\partial_y^2 f(x, y)) \partial_y^2 f(x, y) - (\partial_{xy}^2 f(x, y))^2 \\ &= -\left((\partial_y^2 f(x, y))^2 + (\partial_{xy}^2 f(x, y))^2 \right), \end{aligned}$$

hvor vi brukte den oppgitte sammenhengen $\partial_x^2 f(x, y) = -\partial_y^2 f(x, y)$ og konsekvensen fra Schwarz' teorem. Videre er $(\partial_y^2 f(x, y))^2 \geq 0$ og $(\partial_{xy}^2 f(x, y))^2 > 0$. Det siste følger fra $\partial_{xy}^2 f(x, y) \neq 0$. Vi ser derfor at $D < 0$ for alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ også for (x_0, y_0) , og dermed er (x_0, y_0) et sadelpunkt.

- 6 Funksjonen $f(x, y) = x^2 - y^2$ er en sammensetning av kontinuerlige funksjoner og dermed kontinuerlig. Området den er definert på, U , består bare av randpunkter som betyr at U er lukket. Siden U er gitt som sirkelen $x^2 + y^2 = \frac{4}{9}$, er U også begrenset da den er inneholdt i disken $B_1(0) \subseteq \mathbb{R}^2$. Ekstremalverdisetningen sier som følge av dette at f har ekstremalverdier (maksimums- og minimumspunkter) på U .

De potensielle ekstremalverdiene ligger på randpunkter, vi bruker derfor Lagranges multiplikator metode. Problemet vårt kan formuleres som

$$\text{maksimér/minimér } f(x, y) = x^2 - y^2 \text{ mhp. } g(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{4}{9} = 0.$$

Vi leter etter punkter (x, y) som tilfredsstiller

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \quad g(x, y) = 0, \quad \nabla g(x, y) \neq 0.$$

Dette gir fire ligninger:

$$x = \lambda x, \tag{1}$$

$$-y = \lambda y, \tag{2}$$

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{9} = 0, \tag{3}$$

$$(x, y) \neq (0, 0). \tag{4}$$

Vi ser at $\lambda = 0$ gir $(x, y) = (0, 0)$, men dette er ikke mulig ifølge (4). $\lambda = 1$ gir $y = 0$ i (2) som innsatt i (3) fører til $x = \pm \frac{2}{3}$. $\lambda = -1$ gir $x = 0$ i (1) som innsatt i (3) fører til $y = \pm \frac{2}{3}$. Ingen andre verdier av λ gir nye konsistente verdier for x og y . Dermed er de aktuelle punktene $(0, \pm \frac{2}{3})$ og $(\pm \frac{2}{3}, 0)$. Vi har umiddelbart at $f(\pm \frac{2}{3}, 0) = \frac{4}{9} > f(0, \pm \frac{2}{3}) = -\frac{4}{9}$. Punktene $(\pm \frac{2}{3}, 0)$ er derfor maksimumsverdiene til f , og punktene $(0, \pm \frac{2}{3})$ minimumsverdiene til f .

Alternativt: Området U er ei kurve som kan parametriseres ved hjelp av

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{2}{3} \cos(t), \frac{2}{3} \sin(t) \right), \quad t \in [0, 2\pi].$$

Vi får da

$$g(t) = f(\mathbf{r}(t)) = \frac{4}{9} \cos^2(t) - \frac{4}{9} \sin^2(t).$$

Funksjonen $g : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ har kritiske punkter når

$$0 = g'(t) = -\frac{8}{9} \cos(t) \sin(t) - \frac{8}{9} \sin(t) \cos(t) = -\frac{4}{9} \sin(2t),$$

dvs., når

$$2t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \iff \quad t = \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi får at $n = 0, 1, 2, 3$ gir punktene $(\frac{2}{3}, 0), (0, \frac{2}{3}), (-\frac{2}{3}, 0), (0, -\frac{2}{3})$, og analysen blir da som før.

7 Determinanten til Jacobi-matrisa til variabelbyttet

$$(x, y, z) = \mathbf{T}(R, \varphi, \theta) = (R \cos(\theta) \sin(\varphi), R \sin(\theta) \sin(\varphi), R \cos(\varphi))$$

er

$$|D\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} \nabla T_1 \\ \nabla T_2 \\ \nabla T_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial_R T_1 & \partial_\varphi T_1 & \partial_\theta T_1 \\ \partial_R T_2 & \partial_\varphi T_2 & \partial_\theta T_2 \\ \partial_R T_3 & \partial_\varphi T_3 & \partial_\theta T_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) \sin(\varphi) & R \cos(\theta) \cos(\varphi) & -R \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & R \sin(\theta) \cos(\varphi) & R \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \cos(\varphi) & -R \sin(\varphi) & 0 \end{vmatrix}.$$

Siden $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ og $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$, gir dette

$$|D\mathbf{T}| = \cos(\varphi) R^2 \cos(\varphi) \sin(\varphi) + R \sin(\varphi) R \sin^2(\varphi) = R^2 \sin(\varphi).$$

Funksjonen $(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{p}{2}}$ er kontinuerlig på $D = \mathbb{R}^3 \setminus B_1(0)$, og vi kan derfor tolke trippelintegralet som itererte integraler ved Fubini-Tonelli. I tillegg er det gitt variabelbyttet rett og slett er sfæriske koordinater, og $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. For å beskrive området D , kan vi derfor la $\theta \in [0, 2\pi]$ og $\varphi \in [0, \pi]$ slik at vi får med alle retninger utenfor ballen, og så må vi la $R \in [1, \infty)$ for å få med alle lengder utenfor ballen. Videre er $\mathbf{T} : [1, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow D$ en C^1 -funksjon, men $[1, \infty) \times [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ er ikke lukket og begrenset. Vi får likevel

$$\iiint_D \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)^p dV = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^c \left(\frac{1}{R} \right)^p |R^2 \sin(\varphi)| dR d\varphi d\theta.$$

Siden $\varphi \in [0, \pi]$, vil $|R^2 \sin(\varphi)| = R^2 \sin(\varphi) > 0$. Dette gir oss

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_1^c \left(\frac{1}{R} \right)^p |R^2 \sin(\varphi)| dR d\varphi d\theta &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c R^{2-p} dR \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin(\varphi) d\varphi \\ &= 4\pi \lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c R^{2-p} dR, \end{aligned}$$

hvor

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \int_1^c R^{2-p} dR = \lim_{c \rightarrow \infty} \begin{cases} \left[\frac{1}{3-p} R^{3-p} \right]_1^c, & p < 3, \\ \left[\log(R) \right]_1^c, & p = 3, \\ \left[-\frac{1}{p-3} R^{-(p-3)} \right]_1^c, & p > 3. \end{cases}$$

Integralet konvergerer derfor til $\frac{4\pi}{p-3}$ bare når $p > 3$.

8 Området D er gitt i figur 3. Siden $(-y, x^2)$ er C^1 og området D er avgrenset av den lukkede kurven $\mathcal{C} = \partial D$ som er positivt orientert (altså mot klokka), er betingelsene for Greens teorem er oppfylte, og vi får

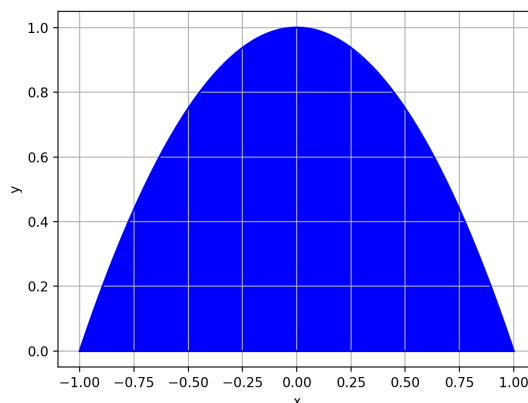
$$\oint_{\partial D} (-y, x^2) \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\partial_x(x^2) - \partial_y(-y)) dA = \iint_D (2x + 1) dA.$$

Integranden er kontinuerlig, og vi kan derfor tolke dobbeltintegralet som itererte integraler ved Fubini-Tonelli. Vi velger oss så arealtvernsnitt som er vinkelrette på x -aksen for å få

$$\begin{aligned} \iint_D (2x + 1) dA &= \int_{-1}^1 \left(\int_0^{1-x^2} (2x + 1) dy \right) dx = \int_{-1}^1 (2x + 1) [y]_0^{1-x^2} dx \\ &= \int_{-1}^1 (2x + 1 - 2x^3 - x^2) dx = \left[x \right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Alternativt: Kurven \mathcal{C} består av kurvene \mathcal{C}_1 gitt ved $y = 1 - x^2$ og \mathcal{C}_2 gitt ved $y = 0$ som respektivt kan parametriseres som

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, 1 - t^2), \quad t \in [-1, 1]$$


 Figur 3: Integrasjonsområdet D .

og

$$\mathbf{r}_2(t) = (t, 0), \quad t \in [-1, 1].$$

Dette gir (hvor vi må passe på orienteringa)

$$\begin{aligned} \oint_C (-y, x^2) \cdot d\mathbf{r} &= - \int_{-1}^1 (-(1-t^2), t^2) \cdot (1, -2t) dt + \int_{-1}^1 (0, 1) \cdot (1, 0) dt \\ &= - \int_{-1}^1 (-(1-t^2) - 2t^3) dt = \int_{-1}^1 (1-t^2 + 2t^3) dt \\ &= \left[t \right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

9 Vi legger merke til at

$$(y-z, z-x, x-y) = \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{G} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = (\partial_y G_3, -\partial_x G_3, \partial_x G_2 - \partial_y G_1).$$

Vi begynner med de første komponentene, som gir

$$G_3(x, y, z) = \frac{1}{2}y^2 - zy + C_1(x, z).$$

Fra likheten $-\partial_x G_3 = z - x$ får vi da

$$C_1(x, z) = -zx + \frac{1}{2}x^2 + C_2(z) \quad \implies \quad G_3(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2 - zx + \frac{1}{2}y^2 - zy,$$

hvor vi valgte $C_2(z) = 0$ for enkelhets skyld. Vi ser så at vi valget $G_1(y) = \frac{1}{2}y^2$ og $G_2(x) = \frac{1}{2}x^2$ gir at likheten for de tredje komponentene holder. Totalt får vi

$$\mathbf{G}(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}y^2, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{2}x^2 - zx + \frac{1}{2}y^2 - zy \right)$$

Overflata \mathcal{S} er et halvkuleskall med rand $\partial\mathcal{S}$ parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), 0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Stokes' teorem gir da

$$\iint_{\mathcal{S}} \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \oint_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}.$$

Her er, pga. symmetri,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \sin^2(t), \frac{1}{2} \cos^2(t), \frac{1}{2} \cos^2(t) - 0 + \frac{1}{2} \sin^2(t) - 0 \right) \cdot (-\sin(t), \cos(t), 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2} \sin^3(t) + \frac{1}{2} \cos^3(t) \right) dt = 0. \end{aligned}$$

Alternativt: Vi kan lukke overflata S ved å la $S' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = 0\}$ og $\partial D = S \cup S'$. Siden vektorfeltet $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{H}$ er C^1 og overflata ∂D stykkevis glatt, kan vi bruke divergensteoremet for å få

$$\iiint_D \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) dV = \iint_{\partial D} \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = \iint_S \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS + \iint_{S'} \nabla \times \mathbf{G} \cdot (-\mathbf{k}) dS$$

Enten kan vi her bruke at $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = 0$ for alle C^2 -vektorfelt, eller vi kan regne ut $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla \cdot \mathbf{H} = \partial_x(y - z) + \partial_y(z - x) + \partial_z(x - y) = 0$. Pga. symmetri, får vi uansett at

$$\iint_S \nabla \times \mathbf{G} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS = - \iint_{S'} \mathbf{H} \cdot (-\mathbf{k}) dS = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x - y) dA = 0.$$

10 Implisitt funksjonsteorem gjør oss i stand til å finne inverse funksjoner i et omegn om ett enkelt punkt. For eksempel vil det si at i ei/et implisitt ligning/ligningssystem, kan vi beskrive en eller flere variabler som en funksjon av de andre variablene. Funksjonen som beskriver denne ligningen eller ligningssystemet må være C^1 som betyr at dens partiellderiverte eksisterer og er kontinuerlige. En sãnn funksjon er da kontinuerlig deriverbar. Vi må ogsã kunne invertere en del av Jacobi-matrisa til denne funksjonen. Jacobi-matrisa til $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ er gitt som

$$D\mathbf{F}(x, y) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(x, y) \\ \nabla F_2(x, y) \\ \vdots \\ \nabla F_m(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} F_1 & \cdots & \partial_{x_n} F_1 & \partial_{y_1} F_1 & \cdots & \partial_{y_m} F_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_1} F_m & \cdots & \partial_{x_n} F_m & \partial_{y_1} F_m & \cdots & \partial_{y_m} F_m \end{bmatrix},$$

hvor $x = (x_1, \dots, x_n)$ og $y = (y_1, \dots, y_m)$. Dette er ei $m \times (n + m)$ -matrise, hvor $D_x \mathbf{F} = D_{(x_1, \dots, x_n)} \mathbf{F}$ er $m \times n$ -delen og $D_y \mathbf{F} = D_{(y_1, \dots, y_m)} \mathbf{F}$ er $m \times m$ -delen av matrisa. I vårt tilfelle er $m = 2$ og $y = (y_1, y_2) = (u, v)$.

Vi skal nå vise at u, v kan skrives som funksjoner av x, y i et omegn om $(w_0, z_0, u_0, v_0) = (2, -1, 2, 1)$. La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt som

$$\begin{aligned} (w, z, u, v) \mapsto \mathbf{F}(w, z, u, v) &= (F_1(w, z, u, v), F_2(w, z, u, v)) \\ &= (w^2 - z^2 - u^2 + v^2, 2wz + z^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8). \end{aligned}$$

Siden \mathbf{F} består av polynomer, er $\mathbf{F} \in C^1(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}^2)$, og $\mathbf{F}(2, -1, 2, 1) = (0, 0)$. Det gjenstår å vise at $D_{(u,v)} \mathbf{F}(2, -1, 2, 1)$ er inverterbar:

$$|D_{(u,v)} \mathbf{F}(w, z, u, v)| = \begin{vmatrix} \partial_u F_1 & \partial_v F_1 \\ \partial_u F_2 & \partial_v F_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2u & 2v \\ -4u & 12v^3 \end{vmatrix} = -24uv^3 + 8uv,$$

dvs., $|D_{(u,v)} \mathbf{F}(2, -1, 2, 1)| = -32 \neq 0$ og dermed er $D_{(u,v)} \mathbf{F}$ inverterbar i punktet $(2, -1, 2, 1)$. Da sier implisitt funksjonsteorem at det finnes en $B_\varepsilon(2, -1) \subseteq \mathbb{R}^2$ slik at det eksisterer

$$\mathbf{G} : B_\varepsilon(2, -1) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{G} \in C^1(B_\varepsilon(2, -1); \mathbb{R}^2), \quad \mathbf{G}(2, -1) = (2, 1),$$

og $(u, v) = \mathbf{G}(w, z) = (G_1(w, z), G_2(w, z))$.