MA1103 Flerdimensjonal analyse
Våren 2023

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 2: Løsning

$\boxed{1}$ **a)** Finn arealet til trekanten med hjørner i $A = (1, 1, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ og $C = (0, 1, 1)$.

b) Finn ligningen til planet Π som er parallelt til planet som er beskrevet av ligningen $5x - 2y + z = 15$ og som går gjennom punktet $(1, 2, 3)$.

Løsning.

a) Merk at

$$|AB| = |AC| = |BC| = \sqrt{2}.$$

Det vil si at trekanten er en likesidet trekant med sidelengde $l = \sqrt{2}$. Arealet er dermed gitt ved

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

b) Planet Π er parallelt med planet gitt av ligningen $5x - 2y + z = 15$ dersom det er på formen

$$5x - 2y + z = K,$$

for en konstant K. Setter inn $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ og får

$$K = 5x - 2y + z = 5 - 4 + 3 = 4.$$

Ligningen til planet Π er gitt ved

$$5x - 2y + z = 4.$$

$\boxed{2}$ Regn ut determinanten.

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

Løsning. Bruker formelen for determinanten og får

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

$\boxed{3}$ En kurve er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (t, t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Finn enhentstangentvektoren og enhetsnormalvektoren til kurven ved $t = 0$.

Løsning. Tangentvektoren $\mathbf{T}$ i punktet t er gitt ved,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = (1, 2t).$$

Det vil si at enhentstangentvektoren $\hat{\mathbf{T}}(t)$ er gitt ved

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}, \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \right).$$

Innsatt i punktet $t = 0$ gir

$$\hat{\mathbf{T}}(0) = (1, 0)\,.$$

Enhetsnormalvektoren er gitt ved

$$\hat{\mathbf{N}} = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}}{\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right|}.$$

Fra kvotientregelen får vi,

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}(t)}{dt} = \left(\frac{-8t}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{2\sqrt{1+4t^2} - 16t^2}{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}} \right),$$

og innsatt for $t = 0$ gir dermed

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}(0)}{dt} = (0, 2) \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}(0)}{dt} \right| = 2.$$

Dermed er enhetsnormalvektoren til kurven $\mathbf{r}(t) = (t, t^2)$ gitt ved

$$\hat{\mathbf{N}}(0) = (0, 1).$$

$\boxed{4}$ En partikkel beveger seg langs en kurve gitt ved $y = x^2$ og $z = x^3$ med konstant vertikal hastighet

$$\frac{dz}{dt} = 3.$$

Finn hastigheten og akselerasjonen til partikkelen i punktet $(1, 1, 1)$.

Løsning. Vi begynner med å finne hastighetsvektoren

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right).$$

Videre vet vi at

$$3 = \frac{dz}{dt} = \frac{d}{dt}x^3 = 3x^2\frac{dx}{dt},$$

ettersom partikelen har konstant vertikal hastighet. Dette gir

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{dy}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} = \frac{2}{x}.$$

Hastigheten til partikkelen i punktet $(1, 1, 1)$ er dermed gitt ved

$$\mathbf{v}\big|_{(x,y,z)=(1,1,1)} = (1, 2, 3).$$

Vi kan gjøre en lignende utregning for akselerasjonen. Per definisjon er akselerasjonenvektoren gitt ved

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Siden partikkelen har konstant vertikal hastighet har vi

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}x^3 = 3\frac{d}{dt}\left(x^2\frac{dx}{dt}\right) = 6x\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 3x^2\frac{d^2x}{dt^2}.$$

Dersom vi bruker det vi fant om hastighetsvektoren, får vi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2}{x}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\frac{2}{x^5}.$$

Tilsvarende får vi

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2x\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{2}{x^4} - \frac{4}{x^4} = -\frac{2}{x^4}.$$

Dette gir akselerasjonenvektoren

$$\mathbf{a}\big|_{(x,y,z)=(1,1,1)} = (-2, -2, 0),$$

i punktet $(1, 1, 1)$.

$\boxed{5}$ Finn en parametrisering for skjæringskurven mellom de to overflatene gitt ved

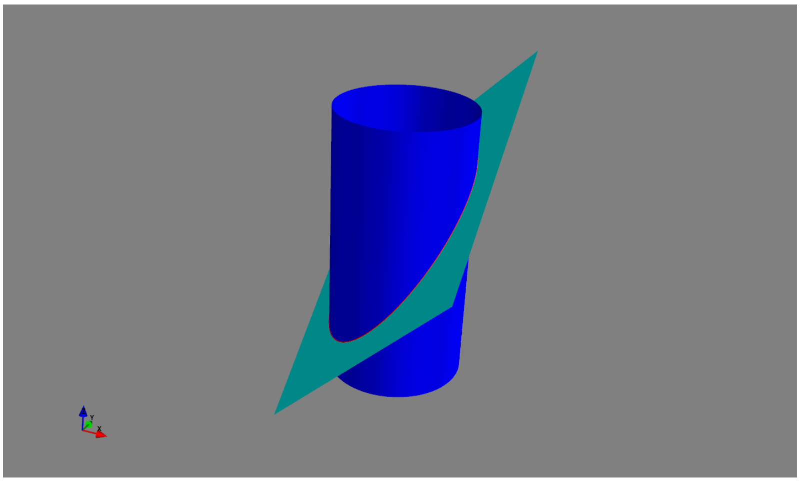
$$x^2 + y^2 = 9, \quad \text{og} \quad z = x + y.$$

(*Merk:* Det finnes flere mulige parametriseringer av kurven.)

Løsning. En mulig parametrisering er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (3\cos(2\pi t), 3\sin(2\pi t), 3\cos(2\pi t) + 3\sin(2\pi t)), \quad t \in [0, 1].$$

En skisse av overflatene og skjæringskurven er gitt i Figure 1.



Figur 1: Figuren viser sylinderen gitt ved $x^2 + y^2 = 9$ i mørkeblått, planet gitt $z = x + y$ i turkis og skjæringskurven i rødt.

$\boxed{6}$ Vis at krumningen til enhver sirkel i planet er konstant.

Løsning. Krumningen κ er gitt ved

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} \right|,$$

hvor $\hat{\mathbf{T}}$ er enhetstangenten, og s er buelengdeparameteren. Vi kan gi en buelengdeparametrisering av en sirkel med radius ρ på formen.

$$\mathbf{r}(s) = \left(\rho \cos\left(\frac{s}{\rho}\right), \rho \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \right), \quad s \in [0, 2\pi\rho].$$

Merk at det følger fra oppgave $\boxed{\text{Ekstra 1}}$ at dette er en buelengdeparametrisering ettersom

$$\left| \frac{d\mathbf{r}(s)}{ds} \right| = \sqrt{\left(-\frac{\rho}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \right)^2 + \left(\frac{\rho}{\rho} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \right)^2} = 1.$$

Enhetstangentvektoren er dermed gitt ved

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \left(-\sin\left(\frac{s}{\rho}\right), \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \right).$$

Dermed får vi at krumningen til en sirkel med radius ρ er gitt ved

$$\kappa(s) = \left| \frac{d\hat{\mathbf{T}}(s)}{ds} \right| = \sqrt{\left(-\frac{1}{\rho} \cos\left(\frac{s}{\rho}\right) \right)^2 + \left(-\frac{1}{\rho} \sin\left(\frac{s}{\rho}\right) \right)^2} = \frac{1}{\rho}.$$

$\boxed{7}$ **a)** La $\mathbf{r}(t) \subseteq \mathbb{R}^3$ være en glatt kurve. Vis at dersom $|\mathbf{r}|$ er konstant, så står hastighetsvektoren $\mathbf{v}$ vinkelrett på $\mathbf{r}$.

b) Finn enhetstangentvektoren, enhetsnormalvektoren, og krumningen til kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = e^t(\cos(t), \sin(t), 1),$$

som funksjoner av t.

Løsning.

a) Dersom $|\mathbf{r}|$ er konstant, så vil også $|\mathbf{r}|^2$ være konstant. Dermed får vi

$$0 = \frac{d}{dt}|\mathbf{r}|^2 = \frac{d}{dt}\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{v},$$

som viser at $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$.

b)

Vi starter med å finne tangentvektoren,

$$\mathbf{T}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = e^t(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1).$$

Ved å normalisere tangentvektoren får vi enhetstangentvektoren gitt ved

$$\hat{\mathbf{T}}(t) = \frac{\mathbf{T}(t)}{|\mathbf{T}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\cos(t) - \sin(t), \sin(t) + \cos(t), 1).$$

Vi ønsker å ha enhentstangentvektoren parametrisert med hensyn på buelengdeparameteren $s = s(t)$ gitt ved

$$s(t) = \int_a^t \left| \frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau.$$

Kjerneregelen gir

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|,$$

hvor vi brukte analysens fundamentalteorem. Videre får vi ved å derivere enhentstangentvektoren

$$\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{3}}(-\sin(t) - \cos(t), \cos(t) - \sin(t), 0), \qquad \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right| = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Dermed får vi at krumningen er gitt ved

$$\kappa(t) = \left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds}\right| = \frac{1}{|\mathbf{T}(t)|}\left|\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt}\right| = \frac{1}{e^t\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3}e^{-t},$$

og enhetsnormalvektoren er gitt ved

$$\hat{\mathbf{N}}(t) = \frac{1}{\kappa(t)}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{ds} = \frac{1}{\kappa(t)|\mathbf{T}(t)|}\frac{d\hat{\mathbf{T}}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin(t) - \cos(t), \cos(t) - \sin(t), 0).$$

Ekstra 1 La $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ være en glatt (parametrisert) kurve i $\mathbb{R}^3$ for $t \in [a, b]$. Vis at $\mathbf{r}$ er parametrisert av buelengden hvis og bare hvis $a = 0$ og $|\mathbf{r}'(t)| = 1$.

Løsning. Vi vet at dersom $\mathbf{r}$ er parametrisert av buelengden så er $|\mathbf{r}'(s)| = 1$ og $s \in [0, b]$. Altså, dersom $s = t$ så har vi $ds = v(t)dt = v(s)ds$. Dette gir $v(s) = |\mathbf{r}'(s)| = 1$.

På motsatt side, dersom $|\mathbf{r}'(t)| = 1$, og $a = 0$ så er buelengden gitt ved

$$s(t) = \int_0^t ds = \int_0^t \left| \frac{d\mathbf{r}(\tau)}{d\tau} \right| d\tau = \int_0^t d\tau = t,$$

som gir $s = t$, og $\mathbf{r}$ er parametrisert av buelengden.

$\boxed{\text{Ekstra 2}}$ Skisser kurven $\mathcal{C}$ som er parametrisert ved

$$x = a\cos(t)\sin(t), \quad y = a\sin^2(t), \quad z = bt.$$

Finn buelengden til $\mathcal{C}$ mellom $t = 0$ og $t = T > 0$.

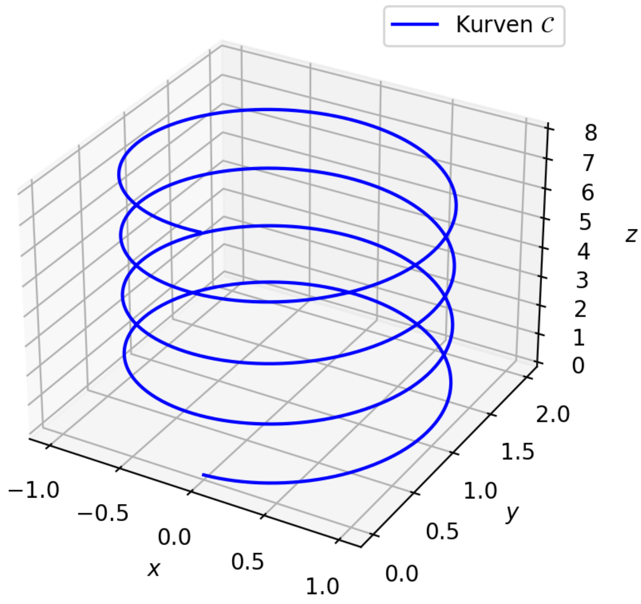
Løsning. Vi kan skrive om parametriseringen til kurven ved

$$\begin{cases} x = a\cos(t)\sin(t) = \frac{a}{2}\sin(2t) \\ y = a\sin^2(t) = \frac{a}{2}(1 - \cos(2t)) \\ z = bt, \end{cases}$$

som beskriver en helix som ligger på sylinderen gitt ved

$$x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Kurven er skissert i Figur 2.



Figur 2: Skisse av kurven $\mathcal{C}$ parametrisert ved $x = a\cos(t)\sin(t), y = a\sin^2(t), z = bt$ for $a = 2$ og $b = 2/\pi$ og $t \in [0, 4\pi]$.

Vi finner buelengden som en funksjon av T,

$$\begin{aligned} s(T) &= \int_0^T \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{a^2\cos^2(2t) + a^2\sin^2(2t) + b^2} dt \\ &= \int_0^T \sqrt{a^2 + b^2} dt = T\sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$