Øving 13: Løsning

$\boxed{1}$ Finn arealen av området avgrenset av ellipsen

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

ved bruk av linjeintegral.

Løsning.

La D være det lukkede området avgrenset av ellipsen E. Dersom P og Q er C^1 funksjoner i et omegn om D, så følger det fra Greens teorem at

$$\oint_E P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA.$$

Om vi velger $P = 0$ og $Q = x$ får vi

$$\text{Area}(D) = \iint_D dA = \oint_E x\,dy.$$

Siden E er ellipsen gitt ved

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1,$$

kan vi parametrisere E ved $x = |a|\cos(\theta)$ og $y = |b|\sin(\theta)$, hvor $\theta \in [0, 2\pi]$. Vi merker oss at

$$\frac{dy}{d\theta} = |b|\cos(\theta),$$

som igjen gir

$$\text{Area}(D) = \oint_E x\,dy = \int_0^{2\pi} |ab|\cos^2(\theta)d\theta = ab\int_0^{2\pi} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}d\theta = |ab|\pi,$$

hvor vi brukte $\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1$.

$\boxed{2}$ La C være en enkel lukket kurve i planet som er orientert mot klokken og som omringer origo. Videre, la F være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}(-y, x), \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Bruk Greens teorem til å vise

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 2\pi.$$

Hint: Hvorfor kan vi ikke anvende Greens teorem direkte?

Løsning. La D være området avgrenset av kurven C. Vi ønsker å bruke Greens teorem til heller integrere over D, men origo er inneholdt i D mens $\mathbf{F}$ er ikke definert i origo. Dermed er ikke $\mathbf{F}$ en C^1 funksjon på tillukningen av D, og dermed er heller ikke kravene til Greens teorem oppfylt. Vi kan løse dette ved å fjerne origo fra D. La $\varepsilon > 0$ og definer området D_ε ved å fjerne en ε-ball om origo fra D, det vil si

$$D_\varepsilon = D \backslash B(0, \varepsilon).$$

Vi kan nå merke at kravene til Greens teorem er oppfylt på D_ε, og at randen til D_ε er gitt av kurven C, orientert mot klokken, og sirkelen C_ε med radius ε orientert med klokken. Greens teorem gir

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA.$$

La oss finne de partiellderiverte. For $F_1 = -y/(x^2 + y^2)$ får vi fra kvotientregelen

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

og tilsvarende for $F_2 = x/(x^2 + y^2)$,

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right) = \frac{-x^2 + y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Vi ser dermed at $\partial_y F_1 = \partial_x F_2$, og dermed gir Greens teorem

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{D_\varepsilon} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = 0, \quad \Longrightarrow \quad \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Sirkelen C_ε kan parametriseres ved $x = \varepsilon \cos(\theta)$ og $y = \varepsilon \sin(\theta)$ for $\theta \in [0, 2\pi]$. Dette gir $dx = -\varepsilon \sin(\theta) d\theta$ og $dy = \varepsilon \cos(\theta) d\theta$. Vi får dermed at linjeintegralet er gitt ved

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_\varepsilon} \frac{x}{x^2 + y^2} dy - \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon^2 \cos^2(\theta)}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2 \sin^2(\theta)}{\varepsilon^2} d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

3 La $U \subset \mathbb{R}^3$ være en open delmengde som inneholder et legeme $M \subset \mathbb{R}^3$ med rand ∂M som er en glatt og positive orientert overflate. La ν være den utoverpekende enhetnormalvektoren langs overflate ∂M. Anta at u og v er glatte reelle funksjoner definert U. Vis de såkalte Greens formlene,

(i)

$$\iiint_M \Delta u \, dV = \iint_{\partial M} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.$$

(ii)

$$\iiint_M \nabla u \cdot \nabla v \, dV = \iint_{\partial M} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, dS - \iiint_M u \Delta v \, dV.$$

(iii)

$$\iiint_M (u \Delta v - v \Delta u) \, dV = \iint_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) \, dS,$$

hvor $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2 + \partial_z^2$ er laplaceoperatoren og den normalderiverte av u er gitt ved

$$\nabla u \cdot \nu = \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Hint: Bruk divergensteoremet for et passende vektorfelt X.

Løsning. Vi starter ved å vise (i). Dersom $\mathbf{X}$ er et glatt vektorfelt på U så gir divergensteoremet

$$\iiint_M \nabla \cdot \mathbf{X} \, dV = \iint_{\partial M} \mathbf{X} \cdot \nu \, dS.$$

La $\mathbf{X} = \nabla u$. Da er $\mathbf{X}$ et glatt vektorfelt ettersom u er en glatt funksjon på U. Videre har vi $\nabla \cdot \mathbf{X} = \nabla \cdot \nabla u = \Delta u$. Siden ν er en enhetsvektor har vi at $\nabla u \cdot \nu = \partial_\nu u$ er den retningsderivert av u med hensyn på retningen ν. Dermed gir divergensteoremet

$$\iiint_M \Delta u \, dV = \iiint_M \nabla \cdot \mathbf{X} \, dV = \iint_{\partial M} \mathbf{X} \cdot \nu \, dS = \iint_{\partial M} \nabla u \cdot \nu \, dS = \iint_{\partial M} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS,$$

som er den første formelen.

La oss nå se på (ii). La $\mathbf{X} = v\nabla u$ slik at $\nabla \cdot \mathbf{X} = \nabla \cdot (v \nabla u) = \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u$ fra produktregelen. Divergensteoremet gir da

$$\begin{aligned}\iiint_M \nabla v \cdot \nabla u + v \Delta u \, dV = \iiint_M \nabla \cdot \mathbf{X} \, dV = \iint_{\partial M} \mathbf{X} \cdot \nu \, dS &= \iint_{\partial M} v \nabla u \cdot \nu \, dS \\ &= \iint_{\partial M} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS.\end{aligned}$$

Skriver vi om likningen, får vi

$$\iiint_M \nabla v \cdot \nabla u \, dV = \iint_{\partial M} v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS - \iiint_M v \Delta u \, dV.$$

Formel (iii) følger direkte fra (ii) ettersom

$$\begin{aligned}\iiint_M (u \Delta v - v \Delta u) \, dV &= \iint_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS - \iiint_M (\nabla u \cdot \nabla v - \nabla v \cdot \nabla u) \, dV \\ &= \iint_{\partial M} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) dS.\end{aligned}$$

4 La $\mathbf{F} : (x, y, z) \mapsto (xy^2, y, z)$. Bruk divergensteoremet til å beregne

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, dS,$$

hvor T er delen av sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ med $y \geq 0$ og $\mathbf{N}$ er den utoverpekende enhetsnormalvektoren på sfæren.

Løsning.

Merk at T er deler av randen til den halvdelen av kulen med radius 2 som er gitt ved $y \geq 0$. La oss kallen denne halve kulen for B. Fra divergensteoremet har vi

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS + \iint_{B \cap \{y=0\}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV,$$

hvor divergensen er gitt ved

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = y^2 + 2.$$

og den utoverpekende normalvektoren på $B \cap \{y = 0\}$ er gitt ved $\mathbf{N} = (0, -1, 0)$. Vi ser da at

$$\iint_{B \cap \{y=0\}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = -\iint_{B \cap \{y=0\}} y\, dS = 0.$$

ettersom $\mathbf{F} = (xy^2, y, z) = (0, 0, z)$ på $B \cap \{y = 0\}$. Dette gir dermed

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{N}\, dS = \iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV.$$

Vi må dermed beregne volumintegralet over B. Ettersom B er den halvdelen av en sfære med radius to, gitt ved $y \geq 0$, er det ønskelig å bruke kulekoordinater til å regne ut integralet. I kulekoordinater er B gitt ved

$$x = \rho \cos(\theta) \sin(\varphi), y = \rho \sin(\theta) \sin(\varphi), z = \rho \cos(\varphi),$$

hvor $\theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, \pi], \rho \in [0, 2]$. Kravet $\theta \in [0, \pi]$ er for å begrense $y \geq 0$. Vi får da

$$\begin{aligned}
\iiint_B \nabla \cdot \mathbf{F}\, dV &= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^\pi (\rho^2 \sin^2(\theta) \sin^2(\varphi) + 2)\rho^2 \sin(\varphi)\, d\theta d\varphi d\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^\pi \int_0^\pi \Big(\rho^4 \sin^2(\theta) \sin^3(\varphi) + 2\rho^2 \sin(\varphi)\Big)\, d\theta d\varphi d\rho \\
&= \int_0^2 \int_0^\pi \Big(\frac{\pi}{2}\rho^4 \sin^3(\varphi)\frac{\pi}{2} + 2\pi\rho^2 \sin(\varphi)\Big)\, d\varphi d\rho \\
&= \int_0^2 \Big(\frac{2\pi}{3}\rho^4 + 4\rho^2\pi\Big)\, d\rho \\
&= \int_0^2 \frac{2}{3}\pi\rho^4 + 4\rho^2\pi\, d\rho \\
&= \frac{2^6}{15}\pi + \frac{2^5}{3}\pi = \frac{224}{15}\pi,
\end{aligned}$$

hvor vi brukte

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin(\varphi)\, d\varphi = 2, \\
&\int_0^\pi \sin^2(\varphi) d\varphi = \int_0^\pi \frac{1 - \cos(2\varphi)}{2}\, d\varphi = \frac{\pi}{2} \\
&\int_0^\pi \sin^3(\varphi) d\varphi = \int_0^1 \sin(\varphi)(1 - \cos^2(\varphi)) d\varphi = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

Her brukte vi den trigonometriske identiteten $2\sin^2(\varphi) = 1 - \cos(2\varphi)$ i det andre integralet, og variabelskifte $u = \cos(\varphi)$, $du = -\sin(\theta)d\theta$ i det siste integralet.

$\boxed{5}$ Bruk Stokes' teorem til å vise

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \sqrt{3}\pi a^2,$$

hvor C er den negativt orienterte skjæringskurven mellom overflatene $x^2+y^2+z^2 = a^2$ og $x + y + z = 0$.

Løsning. Vi starter med å finne skjæringskurven mellom kulen $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ og planet $x + y + z = 0$. Siden planet $x + y + z = 0$ går gjennom origo må skjæringskurven være en storsirkel på kulen med radius a. Det vil si at C er en sirkel med radius a i planet $x + y + z = 0$, se for eksempel Figur 1, som er en enkel og lukket kurve i $\mathbb{R}^3$. La D være disken i planet $x + y + z = 0$ som er avgrenset av C. Vi vet da at $\text{Area}(D) = \pi a^2$.

Vi merker oss at linjeintegralet er gitt ved

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor $\mathbf{F} = (y, z, x)$ som er et glatt vektorfelt i $\mathbb{R}^3$. Stokes' teorem gir dermed

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\,dS,$$

hvor $\mathbf{N}$ er en enhetsnormalvektor på D med orientering med hensyn på orienteringen til C. Siden D ligger i planet $x + y + z = 0$ holder det å finne en normalvektor til planet. Siden origo ligger i planet vet vi at enhetsnormalvektorene er gitt ved

$$\mathbf{N} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1),$$

ettersom ligningen for planet er $\mathbf{N} \cdot (x - 0, y - 0, z - 0) = \pm\sqrt{3}^{-1}(x + y + z) = 0$. Fra orienteringen til C må vi velge

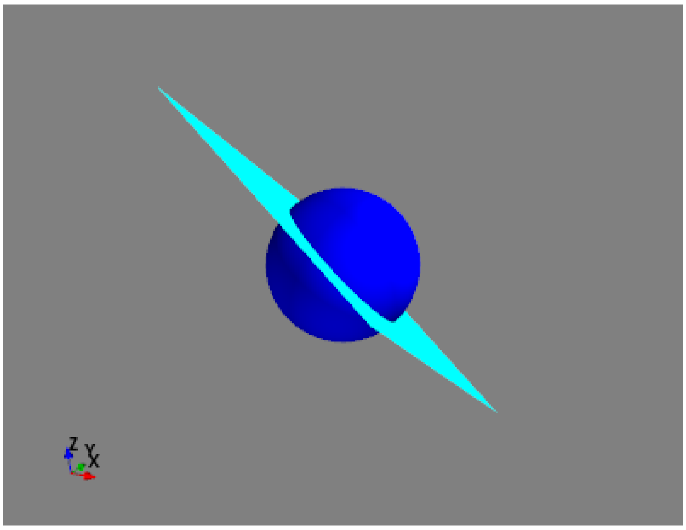
$$\mathbf{N} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Vi finner nå curlen til $\mathbf{F}$. Fra definisjonen på curl har vi

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1).$$

Dette gir da $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = 3/\sqrt{3} = \sqrt{3}$ og dermed blir linjeintegralet

$$\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz = \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\,dS = \sqrt{3}\iint_D dS = \sqrt{3}\text{Area}(D) = \sqrt{3}\pi a^2.$$



Figur 1: Figuren viser en skjæringen mellom kulen gitt ved $x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$ i blått og planet $x + y + z = 0$ gitt i turkis. Vi ser at skjæringskurven er en storsirkel på kulen.

Alternativt for å finne arealet til D. En annen måte å finne arealet til D er å sette inn for z, noe som gir

$$a^2 = 2(x^2 + y^2 + xy) = \frac{3}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}(x - y)^2 = \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}v^2,$$

hvor $u = x + y$ og $v = y - x$. Vi ser dermed at området vi integrerer over er gitt av en ellipse i uv-planet med halvakser $\sqrt{2/3}$ og $\sqrt{2}$. La oss kalle ellipsen for E. Skriver vi om variablene har vi $x = (u - v)/2$ og $y = (u + v)/2$. Videre, er overflateelementet for grafen til $z = f(x, y) = -x - y$ gitt ved

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy = \sqrt{3} \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} dudv = \frac{\sqrt{3}}{2} dudv.$$

Dermed får vi at arealet til D er gitt ved

$$\text{Area}(D) = \iint_D dS = \frac{\sqrt{3}}{2} \iint_E dudv = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\sqrt{2} = \pi a^2,$$

hvor vi brukte hva vi fant i oppgave 1 om arealet til en ellipse gitt halvaksene.

$\boxed{6}$ La L være skjæringskurven mellom overflatene gitt ved $(x - 1)^2 + 4y^2 = 16$ og $2x + y + z = 3$ orientert mot klokken sett ovenfra på z-aksen.

La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F} = (z^2 + y^2 + \sin x^2)\mathbf{i} + (2xy + z)\mathbf{j} + (xz + 2yz)\mathbf{k}.$$

Beregn

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Løsning. Vi starter med å finne skjæringskurven L. Siden vi ser på skjæringenkurven mellom et plan og et sylinder kan vi merke oss at skjæringenskurven må være en ellipse. Det vil si at kurven er både enkel og lukket. Vi ønsker dermed å bruke Stokes' teorem for å løse oppgaven. Vi lar derfor $\mathcal{S}$ være området avgrenset av L.

Curlen til vektorfeltet $\mathbf{F}$ er gitt ved

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 + y^2 + \sin x^2 & 2xy + z & xz + 2yz \end{vmatrix} = (2z - 1, z, 0),$$

og fra ligningen til planet kan vi se at den oppoverpekende enhetsnormalvektoren $\mathbf{N}$ er gitt ved

$$\mathbf{N} = \frac{(2,1,1)}{\sqrt{2^2+2}} = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Dermed får vi $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N} = (4z - 2 + z)/\sqrt{6} = (5z-2)/\sqrt{6}$, og Stokes' teorem gir

$$\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{N}\, dS = \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\mathcal{S}} 5z - 2\, dS.$$

Vi fortsetter med å finne en parametrisering av $\mathcal{S}$. Overflaten $\mathcal{S}$ er gitt som den delen av planet $z = 3 - 2x - y$ som ligger innenfor sylinderen $(x-1)^2 + 4y^2 = 16$. Dette gir at vi integrerer funksjonen $z = f(x,y) = 3 - 2x - y$ over en ellipse E i xy-planet. Vi kan dermed bruke ellipsekoordinater, $x = r\cos(\theta) + 1$ og $y = r\sin(\theta)/2$, hvor $r \in [0,4]$ og $\theta \in [0, 2\pi]$. Jacobideterminanten for denne transformationen er gitt ved

$$\det \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \frac{1}{2}\sin(\theta) & \frac{r}{2}\cos(\theta) \end{pmatrix} = \frac{r}{2} \quad \implies \quad dxdy = \frac{r}{2} dr d\theta.$$

Siden $\mathcal{S}$ er gitt av grafen til $z = f(x,y) = 3 - 2x - y$, så har vi $dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy$. Dette gir

$$\begin{aligned}
\int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_{\mathcal{S}} 5z - 2\, dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{6}} \iint_E (5(3 - 2x - y) - 2)\sqrt{1 + 4 + 1}\, dxdy \\
&= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left(3 - 10r\cos(\theta) - \frac{5r}{2}\sin(\theta)\right) \frac{r}{2}\, d\theta dr \\
&= 3\pi \int_0^4 r\, dr = 24\pi.
\end{aligned}$$