MA1103 Flerdimensjonal analyse
Våren 2023

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Øving 12: Løsning

$\boxed{1}$ Finn divergensen og curlen/rotasjonen til vektorfeltet $\mathbf{F}$ gitt ved:

a) $\mathbf{F}(x,y,z) = (x,0,x)$.

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = (xy^2, -yz^2, zx^2)$.

Løsning.

a)

Det følger fra definisjonen av divergens og curl at

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x,y,z) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z) + \frac{\partial F_3}{\partial z}(x,y,z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial z} = 1,$$

og

$$\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ x & 0 & x \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{i} - \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathbf{j} - \frac{\partial x}{\partial y}\mathbf{k} = -\mathbf{j} = (0,-1,0).$$

b)

Det følger fra definisjonen av divergens og curl at

$$\operatorname{div}\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}(-yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(zx^2) = y^2 - z^2 + x^2,$$

og

$$\begin{aligned}\operatorname{curl}\mathbf{F}(x,y,z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy^2 & -yz^2 & zx^2 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial y}(zx^2) - \frac{\partial}{\partial z}(-yz^2)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(zx^2) - \frac{\partial}{\partial z}(xy^2)\right)\mathbf{j} \\ &\quad + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(xy^2)\right)\mathbf{k} \\ &= 2yz\mathbf{i} - 2xz\mathbf{j} - 2xy\mathbf{k} = (2yz, -2xz, -2xy).\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ La $\mathbf{r} = (x,y,z)$ være posisjonsvektoren og la $\mathbf{c}$ en konstant vektor. Vis at

$$\nabla\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla\times(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{c}, \quad \text{og} \quad \nabla(\mathbf{c}\cdot\mathbf{r}) = \mathbf{c}.$$

Løsning. La $\mathbf{r} = (x, y, z)$ og $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Da har vi

$$\begin{aligned}\mathbf{c} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} &= (c_2 z - c_1 y)\mathbf{i} - (c_1 z - c_3 x)\mathbf{j} + (c_1 y - c_2 x)\mathbf{k} \\ &= (c_2 z - c_1 y, c_3 x - c_1 z, c_1 y - c_2 x), \\ \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = c_1 x + c_2 y + c_3 z.\end{aligned}$$

Vi ser dermed at

$$\nabla \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(c_2 z - c_1 y) + \frac{\partial}{\partial y}(c_3 x - c_1 z) + \frac{\partial}{\partial z}(c_1 y - c_2 x) = 0,$$

og

$$\nabla(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \left(c_1 \frac{\partial x}{\partial x}, c_2 \frac{\partial y}{\partial y}, c_3 \frac{\partial z}{\partial z}\right) = (c_1, c_2, c_3) = \mathbf{c}.$$

For det siste uttrykket, bruker vi definisjonen av curl og regner ut. Dette gir

$$\begin{aligned}\nabla \times (\mathbf{c} \times \mathbf{r}) = &\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ c_2 z - c_1 y & c_3 x - c_1 z & c_1 y - c_2 x \end{vmatrix} \\ =& \left(\frac{\partial}{\partial y}(c_1 y - c_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(c_3 x - c_1 z)\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial}{\partial x}(c_1 y - c_2 x) - \frac{\partial}{\partial z}(c_2 z - c_1 y)\right)\mathbf{j} \\ &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(c_3 x - c_1 y) - \frac{\partial}{\partial y}(c_3 x - c_1 z)\right)\mathbf{k} \\ =& (2c_1, 2c_2, 2c_3) = 2\mathbf{c}.\end{aligned}$$

$\boxed{3}$ Finn

$$\iint_D xz \, dS,$$

hvor D er delen av overflaten $z = x^2$ som ligger i første oktant av $\mathbb{R}^3$ og er avgrenset av paraboloiden $z = 1 - 3x^2 - y^2$.

Løsning.

Dersom D er delen av overflaten $z = x^2$ i første oktant som er avgrenset av paraboloiden $z = 1 - 3x^2 - y^2$, så ønsker vi å finne området i xy-planet vi skal integrere over. Skjæringskurven til flatene er gitt ved

$$x^2 = z = 1 - 3x^2 - y^2 \quad \Longrightarrow \quad 4x^2 + y^2 = 1,$$

som er ligningen for en ellipse. Siden vi er i første oktant krever vi $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Det vil si at området i xy-planet vi skal integrere over er gitt ved en kvart ellipse

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

Videre kan vi merke oss at området $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in E, z = x^2\}$ er grafen til en funksjon $z = f(x, y) = x^2$. Vi kan dermed bruke formelen for arealelementet til en graf,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy = \sqrt{1 + 4x^2} dxdy.$$

Integralet vi ønsker å finne er dermed gitt ved

$$\iint_D xzdS = \iint_E xf(x, y)\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} dxdy = \iint_E x^3\sqrt{1 + 4x^2} dxdy.$$

Ettersom mengden E er beskrevet av en kvart ellipse har vi $0 \leq y \leq \sqrt{1 - 4x^2}$, mens $0 \leq x \leq 1/2$. Dette gir

$$\iint_D xzdS = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{1-4x^2}} x^3\sqrt{1 + 4x^2} dydx = \int_0^{\frac{1}{2}} x^3\sqrt{(1 + 4x^2)(1 - 4x^2)} dx.$$

Merk at $(1 + 4x^2)(1 - 4x^2) = 1 - 16x^4$ fra tredje kvadratsetning. Vi kan dermed bruke variabelskifte $u = 1 - 16x^4$ og $du = -64x^3 dx$, noe som gir

$$\int_0^{\frac{1}{2}} x^3\sqrt{(1 + 4x^2)(1 - 4x^2)} dx = -\frac{1}{64}\int_1^0 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{64}\int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{1}{96}.$$

$\boxed{4}$ Finn fluksen til $\mathbf{F} = (x, y, z^2)$ opp gjennom overflaten $\mathcal{S}$ parametrisert ved $\mathbf{r} = (u\cos(v), u\sin(v), u)$, for $0 \leq u \leq 2$ og $0 \leq v \leq \pi$.

Løsning.

Vi ser på overflaten $\mathcal{S}$ parametrisert ved $\mathbf{r} = \Big(u\cos(v), u\sin(v), u\Big)$, $(0 \leq u \leq 2, 0 \leq v \leq \pi)$, har en (ikke normalisert) oppover pekende normalvektor gitt ved

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \cos(v) & \sin(v) & 1 \\ -u\sin(v) & u\cos(v) & 0 \end{vmatrix} = (-u\cos(v), -u\sin(v), u)\,.$$

La $\hat{\mathbf{N}}$ være enhetsnormalvektoren. Da blir det oppoverpekende arealelementet gitt ved

$$\hat{\mathbf{N}}dS = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|}|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| dudv = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} dudv = (-u\cos(v), -u\sin(v), u)\, dudv$$

Fluksen til $\mathbf{F} = (x, y, z^2)$ oppover gjennom $\mathcal{S}$ blir dermed

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = &\int_0^2 \int_0^\pi \Big(-u^2(\cos^2(v) + \sin^2(v)) + u^3\Big)\, dv\, du \\
=&\pi \int_0^2 (u^3 - u^2)\, du \\
=&\pi \left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 \\
=&\frac{4\pi}{3}.
\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ Evaluer linjeintegralet

$$\oint_C \Big(x\sin(y^2) - y^2\Big)\,dx + \Big(x^2 y\cos(y^2) + 3x\Big)\,dy$$

hvor C mot klokken om trapeset T med hjørner $(0,-2)$, $(1,-1)$, $(1,1)$, and $(0,2)$.

Hint: Greens teorem.

Løsning. Siden C er en stykkevis glatt lukket kurve, og integranden er deriverbar kan vi bruke Greens teorem,

$$\oint_{\partial D} F_1 dx + F_2 dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy$$

I vårt tilfelle får vi

$$\begin{aligned}
&\oint_C \Big(x\sin(y^2) - y^2\Big)\,dx + \Big(x^2 y\cos(y^2) + 3x\Big)\,dy \\
=&\iint_T \Big[2xy\cos(y^2) + 3 - \Big(2xy\cos(y^2) - 2y\Big)\Big]\,dA \\
=&\iint_T (3+2y)\,dA \\
=&3\iint_T \,dA + 2\iint_T y\,dA
\end{aligned}$$

Det første integralet er bare tre ganger arealet til T og er gitt ved $3\text{Area}(T) = 3\frac{(2+4)\times 1}{2} = 9$.

Vi ønsker nå å integrere over T, som er skissert i Figur 1. Vi kan merke oss at T er gitt ved $0 \leq x \leq 1$ og $-2+x \leq y \leq 2-x$. Dermed får vi

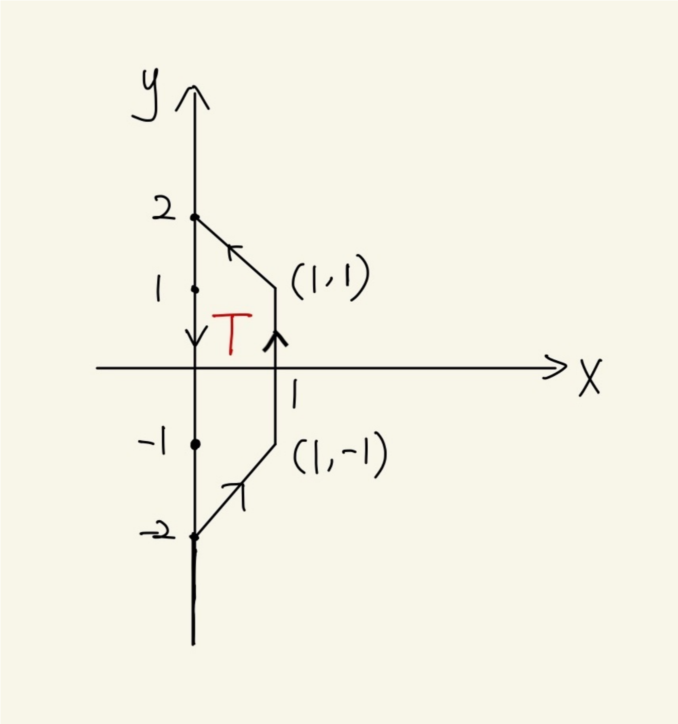
$$2\iint_T ydA = 2\int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} ydydx = \int_0^1 (2-x)^2 - (x-2)^2 dx = 0.$$

Om vi ønsker å regne ut det første integralet, ser vi at

$$3\iint_T dA = 3\int_0^1 \int_{x-2}^{2-x} dydx = 3\int_0^1 2(2-x)dx = 12 - \frac{6}{2} = 9.$$

Vi får dermed at linjeintegralet er gitt ved

$$\oint_C \Big(x\sin(y^2) - y^2\Big)\,dx + \Big(x^2 y\cos(y^2) + 3x\Big)\,dy = 3\iint_T dA + 2\iint_T ydA = 9.$$



Figur 1: Figuren viser en skisse av Trapesen med hjørner $(0, -2)$, $(1, -1)$, $(1, 1)$, and $(0, 2)$.

$\boxed{6}$ Evaluer linjeintegralet

$$\oint_C x^2 y\, dx - xy^2\, dy,$$

hvor C går med klokken om området gitt ved $0 \leq y \leq \sqrt{9 - x^2}$.

Hint: Greens teorem.

Løsning.

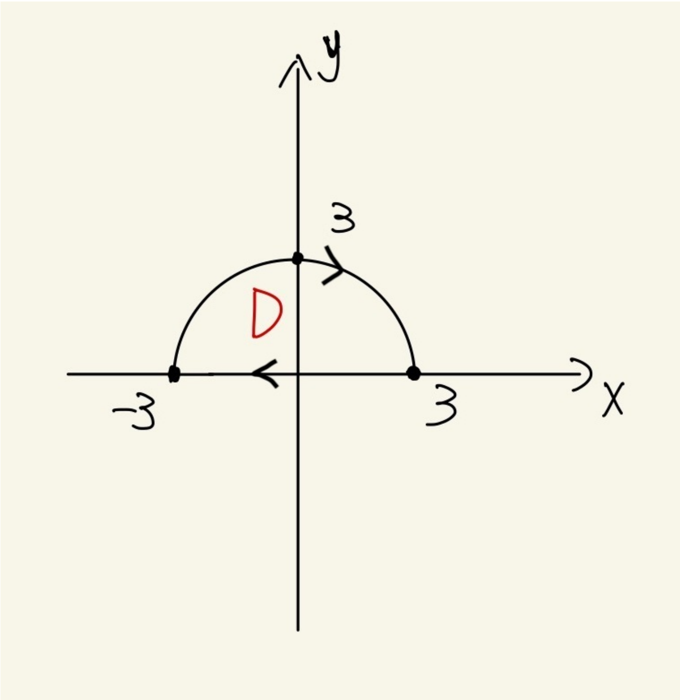
La D være halvsirkelen $x^2 + y^2 \leq 9$, $y \geq 0$ skissert i Figur 2. I polarkoordinater er D beskrevet av $0 \leq r \leq 3$ og $0 \leq \theta \leq \pi$.

La kurven $\tilde{C}$ være randen til D orientert mot klokken. Siden C er randen til D orientert med klokken får vi

$$\oint_C x^2 y\, dx - xy^2\, dy = -\oint_{\tilde{C}} x^2 y\, dx - xy^2\, dy,$$

og siden $\tilde{C}$ er orientert mot klokken følger det fra Greens teorem at

$$\begin{aligned}
\oint_C x^2y\,dx - xy^2\,dy &= -\oint_{\tilde{C}} x^2y\,dx - xy^2\,dy \\
&= -\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(-xy^2) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2y)\right)\,dA \\
&= \iint_D (y^2+x^2)\,dA \\
&= \int_0^\pi \left(\int_0^3 r^2\cdot r\,dr\right)\,d\theta \\
&= \frac{81}{4}\pi.
\end{aligned}$$



Figur 2: Figuren viser en skisse av øvre halvsirkel D med radius 3.

$\boxed{7}$ Bruk det to dimensjonale divergensteoremet til å bevise Greens teorem.

Hint:
1) Se over beviset til det to dimensjonale divergensteoremet for å forstå relasjonen $\mathbf{N} = \mathbf{T}\times\mathbf{k}$, *hvor* $\mathbf{k}$ *er enhetsvektoren i z retning. Deretter beregn* $\mathbf{N}$.
2) Prøv å finne en funksjon $\mathbf{G}$ *slik at* $\mathbf{F}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{N}$.
3) Dette gir

$$\begin{aligned}
\int_C F_1\,dx + F_2\,dy &= \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,ds \\
&= \int_C \mathbf{G}\cdot\mathbf{N}\,ds.
\end{aligned}$$

Fullfør beviset ved å bruke det to dimensjonale divergensteoremet.

Bevis. La R være en regulær lukket området i xy- planet med rand C. Anta at C er en stykkevise glatt enkel lukket kurven med positive orientering med hensyn på R. Videre anta at $\mathbf{F} = (F_1(x,y), F_2(x,y))$ er et glatt vektorfelt på R.

Fra beviset for det to dimensjonale divergensteoremet følger det at enhentstangentvektoren $\mathbf{T} = (T_1, T_2)$ til kurven C og den utoverpekende enhetsnormalvektoren $\mathbf{N}$ til kurven C må tilfredstille $\mathbf{N} = \mathbf{T} \times \mathbf{k}$. Dermed får vi

$$\mathbf{N} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ T_1 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (T_2, -T_1, 0).$$

Vi definerer funksjonen

$$\mathbf{G} = F_2(x,y)\mathbf{i} - F_1(x,y)\mathbf{j}.$$

Merk at

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{T} = F_1 T_1 + F_2 T_2 = (F_2, -F_1, 0) \cdot (T_2, -T_1, 0) = \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}.$$

Om vi nå anvender det to dimensjonale divergensteoremet til funksjonen $\mathbf{G}$ får vi

$$\begin{aligned} \int_C F_1\,dx + F_2\,dy &= \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\,ds \\ &= \int_C \mathbf{G} \cdot \mathbf{N}\,ds \\ &= \iint_R \operatorname{div} \mathbf{G}\,dA \quad \text{(divergensteoremet)} \\ &= \iint_R \Big(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \Big)\,dA. \end{aligned}$$

$\square$