Velkommen
til
interaktive forelesninger
i
Flerdimensonal analyse

med
Jørgen Endal

Nytt tema: Integrasjon i to variabler (kap. 15.1–15.4)

Forelesning uke 9

Variabelbytte for dobbeltintegraler

La $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Da hadde vi at, for $x = g(u)$,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(u))g'(u)du.$$

I det endimensjonale tilfellet gjorde vi ofte et variabelbytte for å få en enklere integrand.
I det todimensjonale tilfellet skal vi se at vi ofte kan få et enklere integrasjonsområde også.

Variabelbytte for dobbeltintegraler

La $\mathbf{T} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$(x, y) = \mathbf{T}(u, v) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = T_1(u, v), \\ y = T_2(u, v). \end{cases}$$

La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(x, y, u, v) &= (F_1(x, y, u, v), F_2(x, y, u, v)) \\ &= (x - T_1(u, v), y - T_2(u, v)) \end{aligned}$$

slik at $\mathbf{F}(x, y, u, v) = (0, 0)$.

Variabelbytte for dobbeltintegraler

Teorem 15.4 (Variabelbytte for dobbeltintegral)

La D være en lukket og begrenset mengde i $\mathbb{R}^2$ slik at $T \in C^1(D; \mathbb{R}^2)$ tilfredsstiller $|DT| \neq 0$ på hele D.
La så $f : T(D) = A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig funksjon.
Da er

$$\begin{aligned}\iint_A f(x,y)dxdy &= \iint_D f(T(u,v))||DT(u,v)||dudv \\ &= \iint_D f(T(u,v))||DT^{-1}(x,y)||^{-1}dudv\end{aligned}$$

Merk

Her står $||DT(u,v)||$ for absoluttverdien til determinanten til $DT(u,v)$.