Velkommen til interaktive forelesninger i Flerdimensonal analyse

med

Jørgen Endal

Vi fortsetter med: Lagranges multiplikatormetode (kap. 14.3, (14.4))

Nytt tema: Derivasjon under integraltegnet (kap. 14.6)

Forelesning uke 8

Diskusjon rundt Lagranges multiplikatormetode

Eksempel (Oppg. 3 b), ord. 2017)

Finn den største og minste verdien til

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2$$

på kvartsirkelen

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x^2 + y^2 = 1, x, y \geq 0\}.$$

- Definisjonsmengden til f er ikke oppgitt, dermed må vi anta den naturlige definisjonsmengden: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Men siden vi skal finne ekstremalverdiene til f på kvartsirkelen, vet vi noe mer. Kvartsirkelen er lukket (alle punkter er randpunkter), og begrenset (inneholdt i disken $x^2 + y^2 \leq 2$).
- f er gitt ved polynomer, dermed er f glatt (C^∞) og spesielt er f kontinuerlig.

Diskusjon rundt Lagranges multiplikatormetode

Teorem 14.4 (Lagranges multiplikatormetode med én bibetingelse)

La $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og $f, g \in C^1(U; \mathbb{R})$.
Anta at $(a, b) \in U$ er slik at $g(a, b) = 0$, $\nabla g(a, b) \neq \mathbf{0}$, og at (a, b) er et lokalt ekstremalpunkt for f.
Da eksisterer $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $\nabla g(a, b) = \lambda \nabla f(a, b)$.

Merk at punktene vi skal finne kan tilfredsstille:

- (Kritiske punkter) $\nabla g(x, y) = \lambda \nabla f(x, y)$, $g(x, y) = 0$, $\nabla g(x, y) \neq \mathbf{0}$.
- (Grafen til g er ikke glatt) $\nabla g(x, y) = \mathbf{0}$.
- (Singulære punkter) $\nabla f(x, y)$ og $\nabla g(x, y)$ ikke eksisterer.
- (Endepunkter) Ytterpunkter til grafen til g.