MA1103 Fleirdimensjonal analyse
Vår 2023

Noregs teknisk–naturvitskaplege universitet
Institutt for matematiske fag

Innlevering
Frist: 31.03.2023

Innlevering, 4 tema, 3 sider
Frist: 31.03.2023, 16.00

Svara dine bør vere tydelige, skrivne på papir, tablet eller med anna utstyr, på engelsk eller norsk, og dei skal leverast som ein einskild PDF i **Inspera**.

Vel **to** tema, og skriv systematisk om kulepunkt (a) og (b) i begge temaa. Innleveringa er forventa å ha eit omfang på totalt fire sider, men dette vil variere med måten ein skriv på. Uttrykk deg rigorøst: forklar til nokon som kan matematikk, men som ikkje kan noko om det bestemte temaet.

De kan jobbe kvar for dykk eller i grupper på to, men de bør være budde på å svare på spørsmål om innleveringa individuelt. Innleveringa skal være signert med ditt eige namn, og eventuelt namnet til samarbeidspartnaren din.

Innleveringa tel **30%** av den totale emnekarakteren.[1]

- **Tema 1. Funksjonar $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$**

(a) Grei ut om samanhengen mellom funksjonar $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ og kurver i $\mathbb{R}^3$. Nemn viktige omgrep som parametrisering, bogelengd, posisjon, hastigheit $\mathbf{v}$, fart og akselerasjon $\mathbf{a}$. Grei òg ut om Frenet-ramma og kvifor ho er viktig for romkurvers fundamentalteorem.

(b) Forklar intuisjonen bak konsepta krumming og torsjon. Legg ved et døme som illustrerer forklaringa di. Utled òg formlane

$$\kappa = \frac{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|}{|\mathbf{v}|^3}, \qquad \tau = \frac{(\mathbf{v} \times \mathbf{a}) \cdot (\frac{d}{dt}\mathbf{a})}{|\mathbf{v} \times \mathbf{a}|^2}.$$

- **Tema 2. Deriverbare funksjonar $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**

(a) Grei ut om den grunnleggjande teorien om deriverbare funksjoner $U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, som inkluderer partiell- ∂_x og retningsderiverte $\partial_{\mathbf{u}}$, gradientar ∇, deriverbarheit, og kontinuerleg deriverbarheit (C^1). Diskutér korleis denne teorien skil seg frå eindimensjonale funksjonar $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

[1] Sjekk dei generelle reglane for denne typen innlevering her. Ved sjukdom som varer meir enn ei veke av prosjektperioden, må ein bruke NTNU sitt skjema for kontiuasjonseksamen/-innlevering.

(b) Lat $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ vere ei parametrisering av kurva $\mathcal{C}$ gjeve ved

$$t \mapsto (r_1(t), r_2(t)), \qquad \text{kvar } r_1, r_2 : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Lat så $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, og lat $g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vere gjeve ved

$$t \mapsto f(\mathbf{r}(t)).$$

Forklar under kva vilkår den følgjande kjerneregelen gjeld

$$g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{d}{dt}\mathbf{r}(t).$$

Bruk liknande kjernereglar for å kome fram til at

$$\partial_{\mathbf{u}} f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \mathbf{u}.$$

Ver presis i antakingane og utrekningane dine.

- **Tema 3. Ekstremalverdiar til funksjonar $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$**

(a) Grei ut om den grunnleggjande teorien for ekstremalverdiar til funksjonar $U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, som inkluderer kritiske, singulære og randpunkt, lokale og globale maksimums- og minimumsverdiar, sadelpunkt, andrederiverttesten, og alle naudsynte vilkår knytt til mengder eller funksjonar.

(b) Lat $U \subseteq \mathbb{R}^2$ vere eit kompakt (avgrensa og lukka) område, og lat $f : U \to \mathbb{R}$ vere ein $C^1(U; \mathbb{R})$-funksjon. Altså har f ekstremalverdiar på U. Vi er då på utkikk etter desse ekstremalverdiane, som vi kan finne i dei kritiske punkta til f inne i U eller på randa til U. Definér bivilkåret $g : U \to \mathbb{R}$ til å vere ein $C^1(U; \mathbb{R})$-funksjon slik at vi kan omformulere problemet til

$$\text{maksimér/minimér } f(x, y) \text{ med omsyn til } g(x, y) \leq 0.$$

Definér eit nytt bivilkår slik at vi kan bruke Langranges multiplikatormetode til å finne ekstremalverdiane til f *både* inne i U *og* på randa til U.

Hint: Vanlegvis kan vi berre finne ekstremalverdiane til f på randa til U ved å bruke Lagranges multiplikatormetode. Spørsmålet er difor: Korleis kan vi tilpasse denne metoden til å finne dei kritiske punkta til f?

- **Tema 4. Varmekjernen**

Definér $f : \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ved

$$(x, t) \mapsto \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \mathrm{e}^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

kvar $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$.

(a) Forklar kvifor f er kontinuerleg, kvifor $\partial_t f$ og $\partial_{x_i} f$, for alle $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, alle eksisterer og er kontinuerlege, og kvifor $\partial_{x_j}\partial_{x_i} f$, for alle $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, alle eksisterer og er kontinuerlege. Vis så at f tilfredsstiller den partielle differensiallikninga

$$\partial_t f(x,t) - \Delta f(x,t) = 0 \qquad \text{for alle } (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty),$$

kvar $\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}\partial_{x_i} = \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$.

(b) Argumentér for at

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)dx = 1.$$

Hint: Det kan vere lurt å redusere problemet til å rekne ut

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-u^2} du.$$