Obs! $\underline{\nabla F = 0}$ nødvendig for lok. maks/min, men ikke tilstrekkelig.

<u>kritiskt punkt</u>

<u>stasjonært punkt</u>

Si $F \in C^2(U, \mathbb{R})$, $\nabla F(x_0) = 0$.

$$\Rightarrow \underline{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \tfrac{1}{2} D^2 F(c)(h,h)$$

$$\boxed{} = \begin{bmatrix} h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D^2 F(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \end{bmatrix}$$ kvadratisk form.

Hessematrise

<u>Positivt/negativt definit</u> dersom alle egenverdier til $D^2F[c]$ er strengt positive (>0), eller alle strengt negative (<0).

$$[h_1 \; h_2] \begin{bmatrix} F_{x_1 x_1} & F_{x_1 x_2} \\ F_{x_1 x_2} & F_{x_2 x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

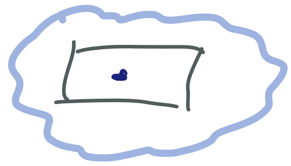
<u>I $\mathbb{R}^2$:</u> $\boxed{} = \boxed{h_1^2 \partial_{x_1}^2 F + 2 h_1 h_2 \partial_{x_1} \partial_{x_2} F + h_2^2 \partial_{x_2}^2 F.}$

$\geq \lambda_{min} |h|^2$

$\leq \lambda_{max} |h|^2$

$D^2 F$ kont, $c \xrightarrow{h \to 0} x_0$, <u>Egenverdiene til $D^2F(x_0)$ avgjør.</u>

Teorem (Andrederivertesten)



$F \in C^2(U, \mathbb{R})$, $K \subset U \subset \mathbb{R}^2$, $x_0 \in K$.

$\underset{\text{åpen}}{U}$ $\qquad$ $\underset{\text{kompakt}}{K}$

$\nabla F(x_0) = 0$, $F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2 > 0$ (< 0) i x_0

$\Longrightarrow$ F har lokalt ekstremum i x_0

(F har saddelpunkt i x_0)

Obs! ≥ 0 (≤ 0) gir ingen utsagn!

Bevis

$$D^2F = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{xy} & F_{yy} \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det(D^2F) = F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2 = (*)$$

Men vet også: $\det D^2F[x_0] = \underbrace{\lambda_1 \lambda_2}_{\text{egenverdier}}$

likt fortegn

$\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Longleftrightarrow (*) > 0$

$\lambda_1 \lambda_2 < 0 \Longleftrightarrow (*) < 0.$

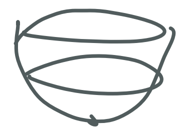
ulike fortegn

#

Huskeregel

$\boxed{F_{xx} F_{yy} - F_{xy}^2}$

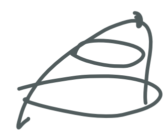
lok. min



• x^2+y^2 $\quad D^2F(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$DF(0,0) = (0,0)$

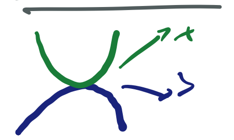
lok. maks.



• $-x^2-y^2$, $\quad D^2F(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

saddelpunkt

• x^2-y^2, $\quad D^2F(0,0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$



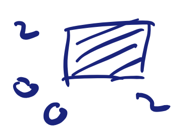
Eks. oppg. 1 $\quad$ 20/8 $\quad$ 2020

$$f(x,y) = 4xy - 2x^2 - y^4$$

(i) Finn alle kritiske punkter til f i $\mathbb{R}^2$.

(ii) Hvilke av disse er lok. maks/min/saddelpunkter?

(iii) Hva er $\max_K f$, $\quad K = \{(x,y) : 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$



Løsn. (i) kritiskt punkt $\Longleftrightarrow$

$$Df(x,y) = (4y - 4x,\ 4x - 4y^3) = (0,0)$$

$$\iff \begin{cases} x = y \\ x = y^3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x(1 - x^2) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ (x,y) = \pm(1,1) \end{cases} \text{eller}$$

Svar: kritiske punkter er $(0,0)$, $(1,1)$ og $(-1,-1)$.

(ii) $$D^2 f = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}$$

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \Big|_{(0,0)} = (-4)(0) - 4 \cdot 4 = -16 < 0$$

$$f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 \Big|_{\pm(1,1)} = (-4)(-12) - 4 \cdot 4 = 32 > 0.$$

Andrederivertesten $\rightsquigarrow$ $(0,0)$ saddelpunkt

$\pm(1,1)$ lok. ekstrema.

$f_{xx} = -4 < 0 \implies$ lok. maks i $\pm(1,1)$.

(iii) Polynomer kont + K kompakt (lukket og begr.)

ekstremalv. setn. $\implies$ $\exists \max_K f$

f kont. deriverbar $\implies$ $\boxed{\text{maks på } \partial K, \text{ eller der } Df = (0,0)}$

på randen

$\cancel{f(0,0)=0}$, $f(1,1)=1$ — eneste mulighet i det indre av K

∂K: • $f|_{x=0} = -y^4$ maks i $y=0$, $f(0,0)=0$.

• $f|_{x=2} = 8y - 8 - y^4$ finn maks på $y \in [0,2]$

$f(2,0) = -8$, $f(2,2) = -8$.

mulig maks på $0<y<2$ der $x=2$:

$\frac{d}{dy} f(2,y) = 8 - 4y^3 > 0$ på $0<y<2$

$\Rightarrow$ maks $f|_{x=2} = f(2,2) = -8 < 0$.

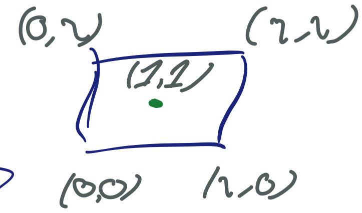
• $f|_{y=0} = -2x^2 \leq 0$

• $f|_{y=2} = 8x - 2x^2 - 16$ finn maks på $x \in [0,2]$

$f(0,2) = -16$. $f(2,2) = -8$.

$\frac{d}{dx} f(x,2) = 8 - 4x > 0$ på $0<x<2$

$\Rightarrow \max\limits_{0 \leq x \leq 2} f(x,2) = -8 < 0$.



$\Rightarrow$ maks $f \leq 0$ på ∂K.

$$\boxed{\text{Så } \max_K f = 1 \text{ i } (1,1).}$$

Kortere: kvadrat komplettere f!

$$4xy - 2x^2 - y^4 = -2\underbrace{(x^2-2xy)}_{(x-y)^2-y^2} - y^4$$

$$= -2(x-y)^2 - \underbrace{(y^4-2y^2)}_{(y^2-1)^2-1}$$

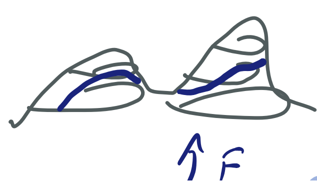
$$= 1 - 2(x-y)^2 - (y^2-1)^2 \le 1$$

med likhet eksakt ; $x = y = \pm 1$.

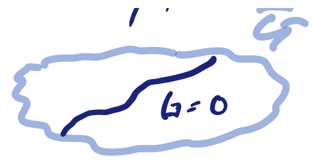
globalt maks på $\mathbb{R}^2$; $(x,y) = \pm(1,1)$.

13.3 Minimering ved bivilkår / Lagrange multiplikatorer

La $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$



og $G : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.



Hva gjelder for min/maks av F over $\{x \in \bar{U} : G(x) = 0\}$?

Spørsmål 1: Har $\{G(x)=0\}$ struktur?

IFT: $|\nabla G| \neq 0$ langs $G(x) = 0 \implies$

$\exists$ C^1-funksjon slik at $\{G(x)=0\}$ er en

kurve / flate / $(n-1)$-dimensjonal hyperflate.

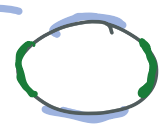
Eks $\mathbb{R}^2$: $G(x_1, x_2)$ med $\frac{\partial G}{\partial x_1} \neq 0$

lokalt $\implies$ $G(x_1, x_2) = 0 \iff G(\phi(x_2), x_2) = 0$ kurve!

Eks $\underbrace{x_1^2 + x_2^2 - 1}_{G(x_1,x_2)} = 0$. $|\nabla G| = |(2x_1, 2x_2)|$

$= \sqrt{4x_1^2 + 4x_2^2} = 2 \neq 0$

$\implies$ Enten $x_1 = x_1(x_2)$ eller $x_2 = x_2(x_1)$



Eks. $\mathbb{R}^3$ $G(x_1, x_2, x_3)$ med $\frac{\partial G}{\partial x_1} \neq 0$

Flate!

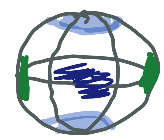
Lokalt $\Rightarrow$ $G(x_1,x_2,x_3)=0 \iff G(g(x_2,x_3),x_2,x_3)=0$

Eks: $\underbrace{x_1^2+x_2^2+x_3^2-1}_{G}=0$, $|\nabla G| = |(2x_1,2x_2,2x_3)|$

$= 2 \neq 0$

$\Rightarrow$ $x_1 = x_1(x_2,x_3)$, $x_2 = x_2(x_1,x_3)$ eller

$x_3 = x_3(x_1,x_2)$.



La γ være en C^1-kurve på $\{G(x)=0\}$.

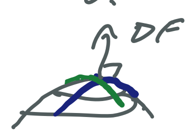
$\gamma: I \to U \subset \mathbb{R}^n$, La $\gamma(0)=x_0$.

Dersom F har et lokalt maks/min i x_0

over $\{G(x)=0\}$ må $\frac{d}{dt}(F\circ\gamma)(0)=0 \overset{\text{kj. reg.}}{\iff}$

$\nabla F(\overbrace{\gamma(0)}^{x_0})\cdot\dot{\gamma}(0)=0 \iff \nabla F \perp \dot{\gamma}$ for Tangentvektor!

hver γ over $\{G(x)=0\}$ gjennom x_0.



$\{G(x)=0\}$ $(n-1)$-dimensjonal

$\Rightarrow$ ∇F normal til $\{G=0\}$.

Men vet også $G(\gamma(t))=0 \xRightarrow[\text{kj. regel}]{d/dt} \nabla G(\gamma)\cdot\dot{\gamma}=0$

$\forall \gamma$ på $\{G=0\}$.

$\Longrightarrow$ ∇G normal til $\{G=0\}$.

Så $\boxed{\nabla F \,/\!/\, \nabla G \text{ i } x_0.}$, dvs.

$\exists \lambda \in \mathbb{R}$: $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$
eller $\nabla G(x_0) = 0$

Lagrangemultiplikator

Setning (Lagrangemult.) Et lok maks/min for $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ over $\{x \in \overline{U} ; G(x) = 0\}$, $G \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ åpen, og $\nabla G \neq 0$ på $\{\ldots\}$ må realiseres i et punkt der $F - \lambda G$ har et kritisk punkt: $\boxed{\nabla F = \lambda \nabla G}$ for noen $\lambda \in \mathbb{R}$.

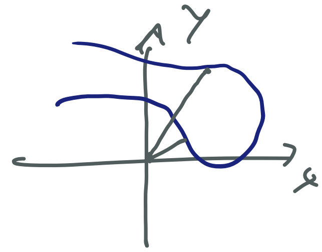
Merk: Må også sjekke punkter der $\nabla G = 0$ på $\{G(x) = 0\}$.

Eks. Oppgave 5, 8.6 2022

Finn største / minste avstand fra origo til kurven $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Løsn. Minimér / maksimér $\boxed{F(x,y) = x^2 + y^2}$

over $G(x,y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$.



$F, G \in C^2 \leadsto$ nødvendig vilkår:

$\nabla F \parallel \nabla G$, dvs.

$\nabla F = \lambda \nabla G$ eller $\nabla G = (0,0)$ i min/maks.

$\nabla F(x,y) = (2x, 2y) = \lambda(10x + 6y, 10y + 6x) = \lambda \nabla G$

$\lambda = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$ umulig (ligger utenfor $G(x,y) = 0$)

$$\begin{cases} 2x = 10\lambda x + 6\lambda y & \cdot y \\ 2y = 10\lambda y + 6\lambda x & \cdot (-x) \end{cases}$$

Obs! $y = 0 \Rightarrow x = 0$
$x = 0 \Rightarrow y = 0$
ikke på kurven!

$0 = 0 + 6\lambda(y^2 - x^2) \underset{\lambda \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Sett inn: $G(x,x) = 16x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$

$G(x,-x) = 4x^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow \boxed{x = \pm \sqrt{2}}$

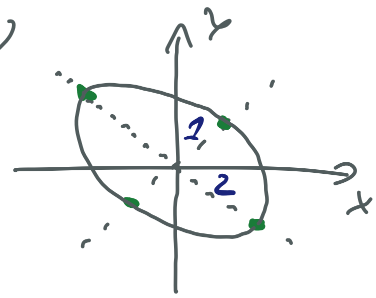
$$F\left(\pm\frac{1}{\sqrt2}, \pm\frac{1}{\sqrt2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \quad \underline{\text{lok. min}} \quad \text{Avstand: } \sqrt{1} = 1$$

$$F(\pm\sqrt2, \mp\sqrt2) = 2 + 2 = 4 \quad \underline{\text{lok. maks}} \quad \text{Avstand: } \sqrt{4} = 2.$$

<u>Obs!</u> $DG(x,y) = (10x + 6y, 10y + 6x) = (0,0)$

$$\iff \begin{cases} 5x = -3y \\ 5y = -3x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{ikke på } G(x,y) = 0$$

<u>Alt.</u>
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt2}(u+v) \\ y = \frac{1}{\sqrt2}(u-v) \end{cases} \iff \begin{cases} u = \frac{1}{\sqrt2}(x+y) \\ v = \frac{1}{\sqrt2}(x-y) \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}_{DF} \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix}$$

inv. bar med $(DF)^{-1} = (DF)^t$

ON-transf. rotasjon $-\frac{\pi}{4}$ $\quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8u^2 + 2v^2 = 8$$

<u>Så:</u> $G(x,y) = 0 \iff \boxed{u^2 + \left(\frac{v}{2}\right)^2 = 1}$

ellipse med halvakser
1 i retning u,
2 i retning v.

Bevis om vendte teorem (M. Spivak, 1940–2020)

La $A = DF(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ med $\det(A) \neq 0$.

invertbar matrise uten.

$$D(\underbrace{A^{-1} F}_{G})(x_0) = A^{-1} DF(x_0) = A^{-1}A = Id \quad \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}$$

Dersom $\exists\, G^{-1}$; så $\exists\, F^{-1} = G^{-1} \circ A^{-1}$:

$$F \circ F^{-1} = A \underbrace{G \circ G^{-1}}_{id} \circ A^{-1} = A A^{-1} = id.$$

Så vi viser setningen for G $(\leadsto F)$.

med $DG(x_0) = id = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & \ddots & 1 \end{bmatrix}$. $\boxed{D(F^{-1}) = D(G^{-1} \circ A^{-1})}$

G C^1: $G(x_0+h) = G(x_0) + \underbrace{DG(x_0)}_{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}} \underbrace{h}_{[h]} + |h| \underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0 \text{ da } h \to 0}$

$$\underset{\exists\, \delta > 0}{\Longrightarrow} \frac{|G(x_0+h) - G(x_0)|}{|h|} \neq 0 \quad \text{når } 0 < |h| < \delta.$$

$\Longrightarrow$ $G(x) \neq G(x_0)$ for x nært x_0; $x \in B_\delta(x_0)$

$$B_\delta(x_0) = \{x : |x - x_0| < \delta\}.$$

$G\ C^1 \iff DG$ kont $\implies DG(x) = Id + \underbrace{A(x)}_{\to 0}$

da $x \to x_0$.

Nå: Viser at G er injektiv på $B_\delta(x_0)$.

Betrakt $|(G(x) - x) - (G(y) - y)|$

$$\overset{\Delta\text{-ulik.}}{\leq} \sum_{j=1}^{n} |(G_j(x) - x_j) - (G_j(y) - y_j)|$$

$$= \sum_{j=1}^{n} |\underbrace{\nabla(G_j(x) - x_j)|_{x=c}}_{1 + A_j(x)|_{x=c} - 1}|\,|x - y|$$

$$\leq \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |A_j(c)|}_{\leq \frac{1}{2}}\,|x-y|$$

$\leq \frac{1}{2}$ dersom x, y nært x_0, dvs δ tilstr. liten.

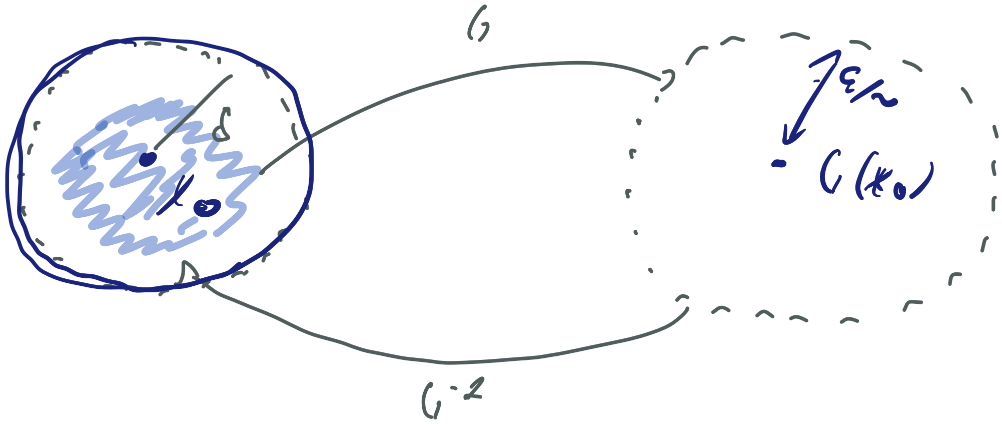
Men har også: $|G(x) - x - (G(y) - y)|$

$$\overset{\Delta\text{-ulikh.}}{\geq} |x - y| - |G(x) - G(y)|$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}|x-y| \leq |G(x)-G(y)|}$$

G injektiv på $B_\delta(x_0)$: $x \neq y \Rightarrow G(x) \neq G(y)$.

• G surjektiv? (dvs på hva?)



$x \longmapsto |G(x) - G(x_0)|$ kont,

$\{|x-x_0| = \delta\}$ kompakt

Ekstr. verdi.setn.
$\Rightarrow$

$$\exists \underbrace{\min_{x \in \partial B_\delta(x_0)} |G(x)-G(x_0)|}_{\varepsilon} > 0$$

Betrakt $B_{\varepsilon/2}(G(x_0))$

Vil vise $\forall y \in B_{\varepsilon/2}(G(x_0))$ $\exists!$ $x \in B_\delta(x_0)$:

unik

$G(x) = y$.

Hvordan: Fiksér y og betrakt avstanden $h(x) = |y - G(x)|^2$.

...