13.1–13.2 Lokale og globale ekstrema

$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kontinuerlig har globalt maksimum på hver kompakt $K \subset U$.

Et eller flere punkter med egenskapen $F(x_0) = \max_{x \in K} F(x)$.

Minst én av følgende muligheter gjelder:

(i) $x_0 \in \partial K$	(globalt maksimum på **randen** av K)
(ii) F ikke deriverbar i x_0	(globalt maksimum i **singulært punkt**)
(iii) $\nabla F(x_0) = 0$	(**nødvendig** vilkår for lokalt ekstremum i indre punkt)

For $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ med $\nabla F(x_0) = 0$ i indre punkt bestemmer egenverdiene til Hessematrisen $D^2F[x_0]$ et eventuelt lokalt ekstremum.

$D^2F[x_0]$ **positivt/negativt definit $\Rightarrow$ lokalt minimum/maksimum.**

$D^2F[x_0]$ **har strengt negative og strengt positive egenverdier $\Rightarrow$ saddelpunkt.**

$D^2F[x_0]$ semidefinit eller ellers indefinit $\Rightarrow$ ingen konklusjon.

Andrederivertetesten i $\mathbb{R}^2$: Tegnet til $\underline{F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2}$ i x_0 avgjør lokalt ekstremum/saddelpunkt.

13.3 Minimering ved bivilkår

$F, G \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ åpen.

Dersom $\{x \in U : \ G(x) = 0\}$ er kompakt har F et maks/min der.

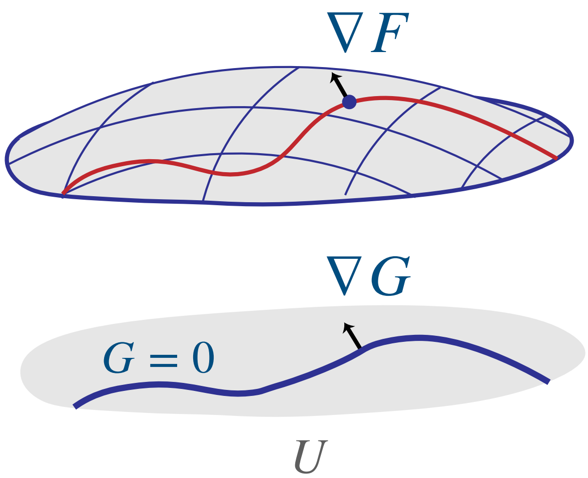
I et punkt der $F(x_0) = \max\limits_{G(x)=0} F(x)$ gjelder at $\nabla F(x_0) \parallel \nabla G(x_0)$, d v s:

(i) $\nabla G(x_0) = 0$ (kritiskt punkt for G)

eller

Lagrange-multiplikator

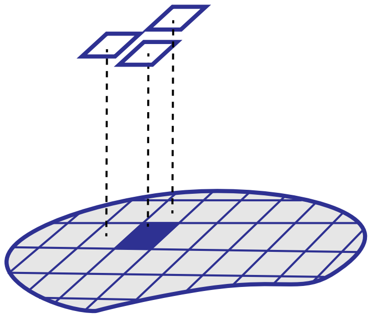
(ii) $\nabla G(x_0) \neq 0$ og $\exists \lambda \in \mathbb{R}$; $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$



Merk at $\nabla G(x_0) \neq 0$ garanterar at $\{G(x) = 0\}$ er en $(n-1)$-dimensjonal kurve, flate eller hyperflate i $\mathbb{R}^n$ kring x_0. Dette er implisitte funksjonssetningen.

14.1–14.3 Integrasjon i planet

Den enkleste måten å innføre integraler i begrensete $U \subset \mathbb{R}^2$ er via Riemannsummer:



$$\iint_U f\,\mathrm{d}A = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j, y_j)\, A(R_j)$$

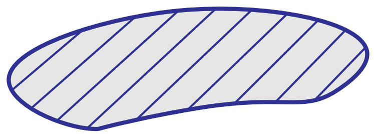
der det maksimale arealet $\max_j A(R_j) \to 0$ når $N \to \infty$,

og punktene (x_j, y_j) kan velges vilkårlig innenfor hver R_j.

Hvis høyreleddet er veldefinert, kalles f **integrerbar**. Kontinuerlige funksjoner er altid integrerbare på begrensete domener av typen nedenfor.

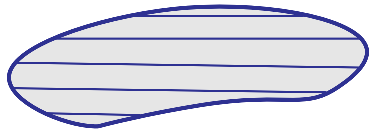
For å sikkerstille at integralet gir mening betrakter vi mengder som kan parameteriseres ved hjelp av kontinuerlige funksjoner:

$$U = \{(x, y)\colon a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\},$$



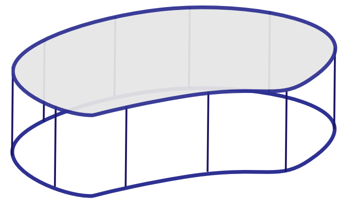
eller

$$U = \{(x, y)\colon a(y) \le x \le b(y), c \le y \le d\}.$$

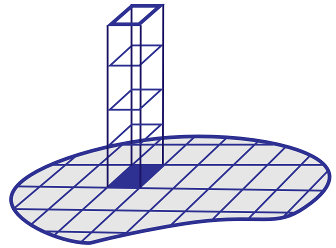


Todimensional integrasjon som itererte integraler

Integralet $\iint_U \mathrm{d}A$ beskriver **arealet** $A(U)$, eller ekvivalent, volumet til legemet med enhetshøyde over samme areal.

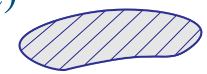


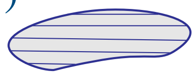
På same måte beskriver $\iint_U f\,\mathrm{d}A$ **volumet** mellom flaten $z = f(x,y)$ og xy-planet.

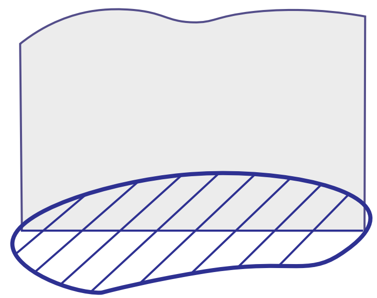


Teorem (Fubini, Tonelli, Euler, …)

$$\iint_U \mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$







dersom f er integrerbar, og U er kontinuerlig parameteriserbar som ovenfor.

Merk: volum som et integral av arealer.