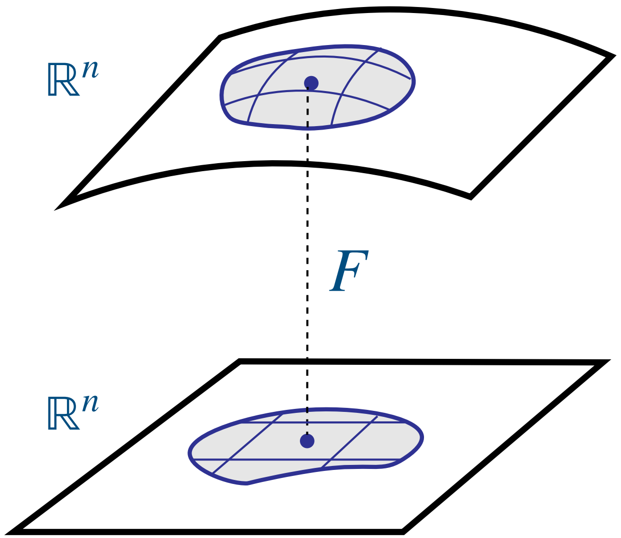
Omvendte funksjonssetningen

$U \subset \mathbb{R}^n$ åpen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ med **Jacobimatrisen** $DF[x_0]$ **omvendbar** $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

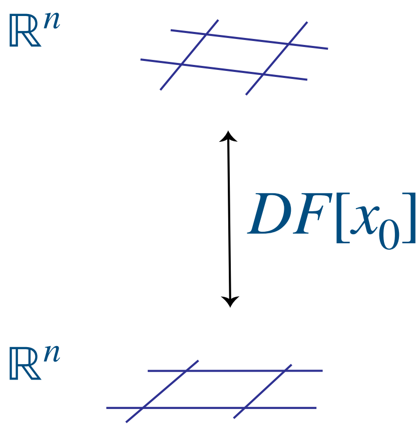
$\Rightarrow$ $\exists \tilde{U} \ni x_0$ sånn at $F\colon \tilde{U} \to F(\tilde{U})$ er omvendbar.

Videre: $F(\tilde{U})$ er en åpen mengde kring $y_0 = F(x_0)$, med $F^{-1} \in C^1(F(\tilde{U}), \tilde{U})$:

$$D(F^{-1}) = (DF)^{-1} \circ F^{-1}$$



$F \approx F(x_0) + DF[x_0]h$



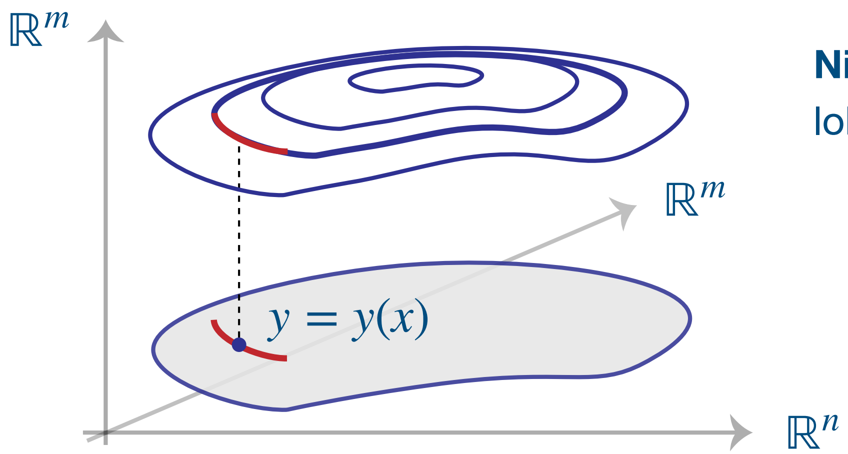
Implisitte funksjonssetningen

$U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ åpen, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ med den partielle **Jacobimatrisen**

$DF_y[x_0, y_0]$ **omvendbar** $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \quad \exists \tilde{U} = \tilde{B}_{x_0} \times \tilde{B}_{y_0} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ og $\Phi \in C^1(\tilde{B}_{x_0}, \tilde{B}_{y_0})$ sånn at $F(x, \Phi(x)) = 0$ **gir alle løsninger** til $F(x, y) = 0$ i $\tilde{U}$, og

$$D\Phi = -[D_yF(\Phi)]^{-1}D_xF(\Phi)\,.$$



Nivåkurve (n-dimensjonal flate, lokalt parameterisert ved $x \in \mathbb{R}^n$)

13.1–13.2 Lokale og globale ekstrema

$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kontinuerlig har globalt maksimum på hver kompakt $K \subset U$.

Et eller flere punkter med egenskapen $F(x_0) = \max\limits_{x \in K} F(x)$.

Minst én av følgende muligheter gjelder:

(i) $x_0 \in \partial K$	(globalt maksimum på **randen** av K)
(ii) F ikke deriverbar i x_0	(globalt maksimum i **singulært punkt**)
(iii) $\nabla F(x_0) = 0$	(**nødvendig** vilkår for lokalt ekstremum i indre punkt)

For $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ med $\nabla F(x_0) = 0$ i indre punkt bestemmer egenverdiene til Hessematrisen $D^2F[x_0]$ et eventuelt lokalt ekstremum.

$D^2F[x_0]$ **positivt/negativt definit $\Rightarrow$ lokalt minimum/maksimum.**

$D^2F[x_0]$ **har strengt negative <u>og</u> strengt positive egenverdier $\Rightarrow$ saddelpunkt.**

$D^2F[x_0]$ semidefinit eller ellers indefinit $\Rightarrow$ ingen konklusjon.

Andrederivertetesten i $\mathbb{R}^2$: Tegnet til $\underline{F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2}$ i x_0 avgjør lokalt ekstremum/saddelpunkt.

13.3 Minimering ved bivilkår

$F, G \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ åpen.

Dersom $\{x \in U\colon\ G(x) = 0\}$ er kompakt har F et maks/min der.

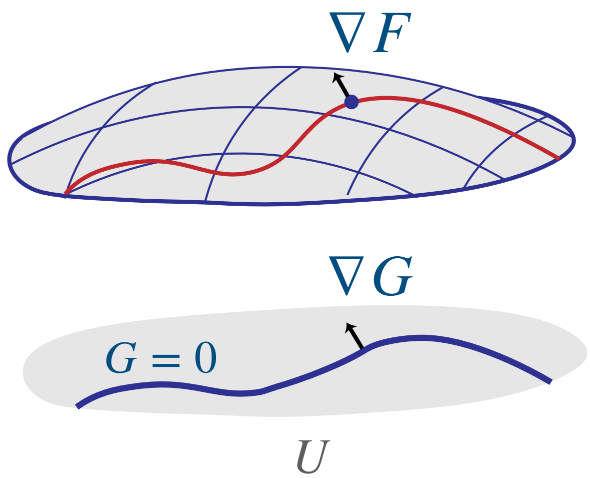
I et punkt der $F(x_0) = \max\limits_{G(x)=0} F(x)$ gjelder at $\nabla F(x_0) \parallel \nabla G(x_0)$, d v s:

(i) $\nabla G(x_0) = 0$ (kritiskt punkt for G)

eller

Lagrange-multiplikator

(ii) $\nabla G(x_0) \neq 0$ og $\exists \lambda \in \mathbb{R}$; $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$



Merk at $\nabla G(x_0) \neq 0$ garanterar at $\{G(x) = 0\}$ er en $(n-1)$-dimensjonal kurve, flate eller hyperflate i $\mathbb{R}^n$ kring x_0. Dette er implisitte funksjonssetningen.