Differensialkalkyl (12.3–12.7)

$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in U$ indre punkt, $\quad v \in \mathbb{R}^n$ med $|v| = 1$ enhetsvektor

$\partial_v F(x_0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{F(x_0 + hv) - F(x_0)}{h}$ er den **retningsderiverte** i punktet x_0 i retning v.

Når $v = e_j$ er en basisvektor i retning x_j er dette den **partielt deriverte**:

Dersom $f(x_j) = F(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, er $\partial_{x_j} F(x_1, \ldots, x_n) = f'(x_j)$ den partielt deriverte i retning x_j.

Deriverte kan også skrives $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$, $\; D_{x_j}F$, $\; F'_{x_j}$, og på mange andre måter…

Tangentplanen til grafen $\{z = F(x,y)\colon (x,y) \in U\}$ i punktet $(x_0, y_0, \underbrace{F(x_0, y_0)}_{z_0})$ gis av

$$\boxed{z = F(x_0, y_0) + (x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0)}$$

Alternativt: $\qquad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \underbrace{(F'_x, F'_y, -1)}_{\text{normal til TP}} = 0$

Gradient og deriverbarhet

Gradienten $\nabla F = (\partial_{x_1} F, \ldots, \partial_{x_n} F)$ er vektoren av partielt deriverte, en *funksjon* $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Funksjonen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, har gradient $\nabla F(x, y) = (2x, 2y)$.

Tangentplanet kan nå skrives: $z = z_0 + (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0)$.

Noe som fører oss til deriverbarhet:

$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er **deriverbar** i et indre punkt $x_0 \in U$ dersom

$$\boxed{F(x_0 + h) = F(x_0) + h \cdot \nabla F(x_0) + |h|\varepsilon(h), \qquad \lim_{|h| \to 0} \varepsilon(h) = 0.}$$

– $\nabla F(x_0)$ er den **deriverte** til F i x_0.
– $F(x_0) + h \cdot \nabla F(x_0)$ er **lineariseringen** til F i punktet x_0 (i retning h, det er den som varierer).
– $|h|\varepsilon(h)$ skrives iblandt $o(h)$.
– h er en (liten) vektor, tenk $h = x - x_0$ og $x = x_0 + h$.

Klassen $C^1(U, \mathbb{R})$ og en kjerneregel

Dersom $\nabla F \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er kontinuerlig, d v s dersom alle de partielt deriverte $\partial_{x_j} F$ er kontinuerlige $x \mapsto \partial_{x_j} F(x)$, så kalles F **kontinuerlig deriverbar**. Dette skrives $F \in C^1(U, \mathbb{R})$.

Kontinuerlig deriverbarhet impliserer deriverbarhet:

$$F \in C^1(U, \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad F \text{ deriverbar.}$$

En kjerneregel. $F \colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \gamma \colon I \subset \mathbb{R} \to U,$

$$F \circ \gamma : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto F \circ \gamma(x) = F(\gamma(x))$$

Dersom F og γ er deriverbare, eksisterer $\dfrac{d}{dt} F \circ \gamma(t) = \nabla F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$.

Korollar: Den retningsderiverte gis av formelen $\partial_v F(x_0) = \nabla F(x_0) \cdot v$ når F er deriverbar i x_0. Bevis: betrakt $\gamma(t) = x_0 + tv$ i kjerneregelen.