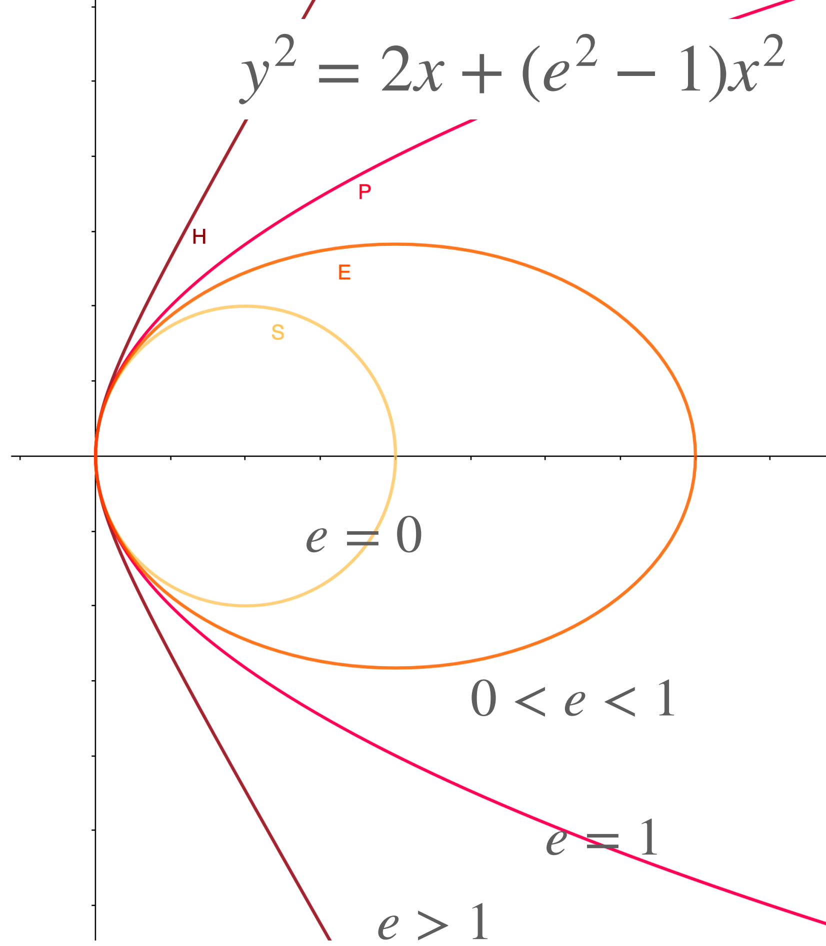
8.1 Kjeglesnitt



Familier av kurver som beskriver skjæringer mellom plan og en kjegle (dobbeltkon).

For tilfellet når kurvene er parallelle med x,y-aksene:

Sirkel: $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Ellipse: $$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Hyperbel: $$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Parabel: $(y - y_0) = c(x - x_0)^2$ eller $(x - x_0) = c(y - y_0)^2$

11.1 (og 11.3) Vektorevaluerte funksjoner

Funksjoner $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, kalles vektorevaluerte. De er kurver i $\mathbb{R}^n$.

$$I \ni t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

Kurven γ er kontinuerlig dersom γ_j er kontinuerlige for alle $j = 1, \ldots, n$.

Kurven γ er glatt dersom $|\dot{\gamma}| = \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{\gamma}_j^2\right)^{1/2} > 0$ på et gitt intervall.

Vektoren $v = \dot{\gamma}$ er hastigheten, skalaren $|v| = |\dot{\gamma}|$ er farten.

$T = \dfrac{v}{|v|}$ er enhetstangentvektoren. Den andrederiverte $a = \dot{v}$ er akselerasjonen.

Buelengden $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau$ er lengden av γ fra $\gamma(t_0)$ til $\gamma(t)$.

11.4 Krumning, torsjon og Frenetrammen

$T = \dfrac{v}{|v|} = \dfrac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ enhetstangent, $s = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |v| \, \mathrm{d}t$ buelengdevariabel.

Krumning $\kappa = \left| \dfrac{dT}{ds} \right| = \dfrac{1}{|v|} \left| \dfrac{dT}{dt} \right|$.

Enhetsnormal $N = \dfrac{dT/ds}{\left| dT/ds \right|} = \dfrac{1}{\kappa} \dfrac{dT}{ds}$. Ved kjerneregelen: $N = \dfrac{dT/dt}{\left| dT/dt \right|}$.

Obs. at $N \perp T$, så $\{T, N\}$ er et lokalt koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ (ON-system).

I $\mathbb{R}^3$ gir $B = T \times N$ en tredje ortogonal enhetsvektor. Det lokale koordinat-systemet $\{T, N, B\}$ kalles Frenetrammen.

Torsjon er skalaren $\tau(s)$ gitt ved $\dfrac{dB}{ds} = -\tau(s) N$.

12.1 Funksjoner av flere variabler

Tenk: $F(x, y) = x^2 + y^2$

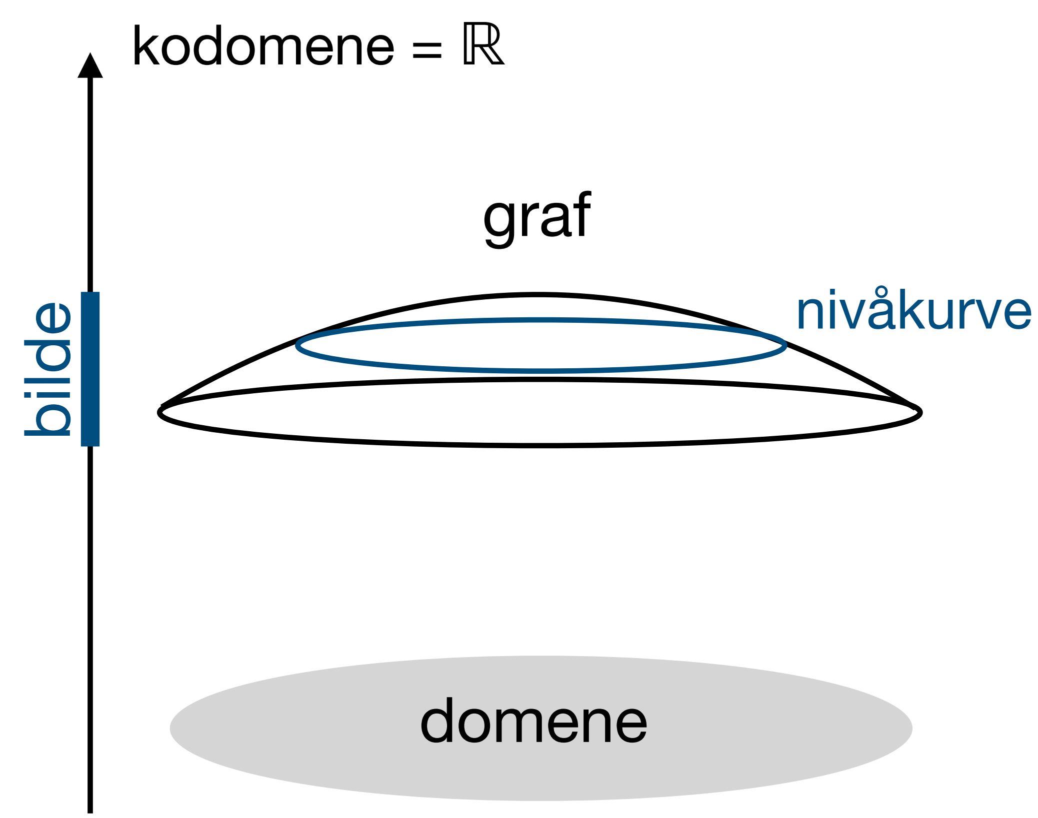
Generelt $F: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto F(x) = F(x_1, \ldots, x_n)$

U er domene (definisjonsmengde), $F(U)$ bilde, og $\mathbb{R}$ kodomene.

$\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) \in \mathbb{R}\}$ naturlig definisjonsmengde.

$\{x \in \mathbb{R}^n : F(x) = c\}$ er nivåmengde.

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : F(x_1, x_2) = c\}$ nivåkurve.



Åpne og lukkede mengder

Et punkt x_0 er et **indre punkt i** U dersom $B_\varepsilon(x_0) \subset U$ for et tilstrekkelig litet $\varepsilon > 0$.

x_0 er et **randpunkt til U** dersom $B_\varepsilon(x_0) \cap U \neq \varnothing$ men $B_\varepsilon(x_0) \not\subset U$ uansett $\varepsilon > 0$.

∂U er **randen til** U**,** mengden av alle randpunkter til U.

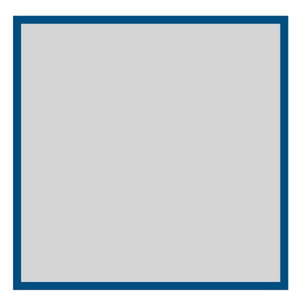
$\overline{U} = U \cup \partial U$ er **tillukningen** av U.

U er **åpen** dersom alle dets punkter er indre punkter.

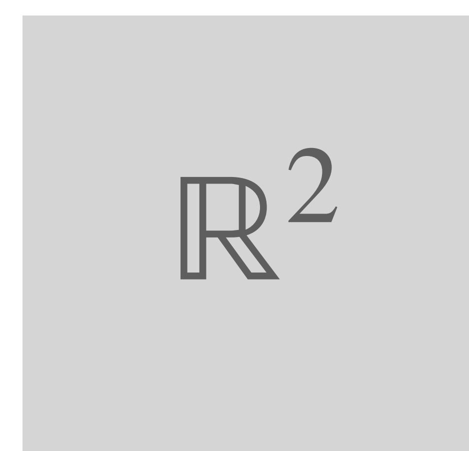
U er **lukket** dersom alle dets randpunkter tilhører U.

åpen

ikke åpen
ikke lukket



lukket



både åpen og lukket

$(\partial\mathbb{R}^2 = \varnothing)$

12.2 Grenseverdier og kontinuitet

Grenseverdi i $x_0 \in \overline{U}$: $\quad 0 < |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x) - L| < \varepsilon \quad$ for $x \in U$.

Kontinuitet i $x_0 \in U$: $\quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \quad$ for $x \in U$.

Obs. $|x - y| = \left((x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ euklidisk lengde i $\mathbb{R}^n$, men
$|F(x) - F(y)|$ vanlig absoluttbeløp på $\mathbb{R}$.

F kontinuerlig på en mengde dersom den er kontinuerlig i alle punkter i mengden.

Summer og produkter av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige.