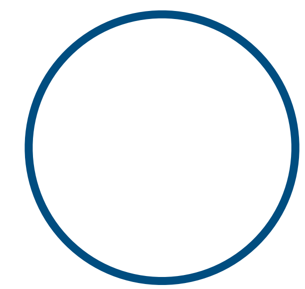
8.5–8.6 Kurver i polarkoordinater

Polarkoordinater og kartesiske koordinater:

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Enhetssirkelen: $$x^2 + y^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$

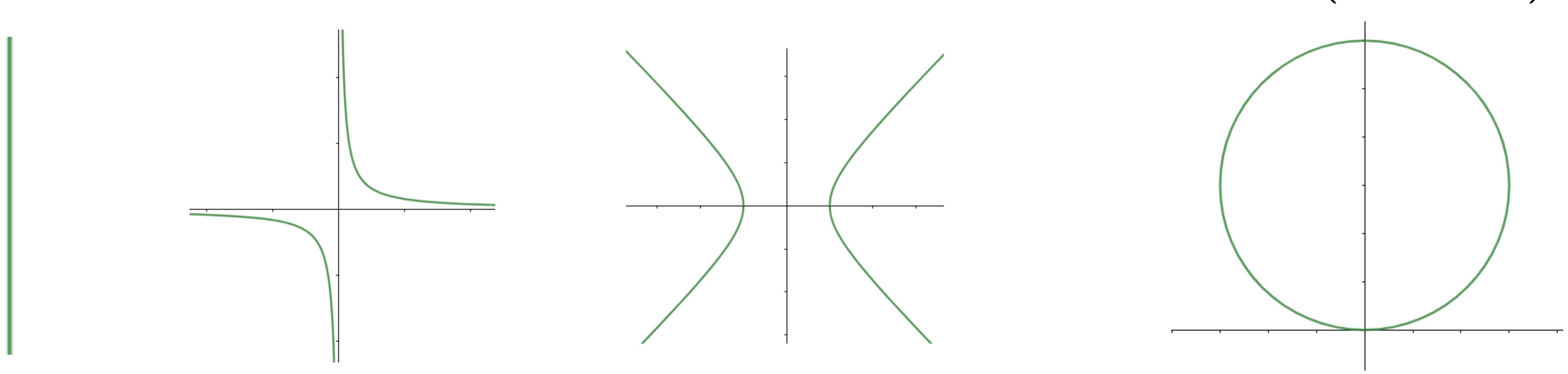


Noen vanlige tilfeller:

$$r = r_0; \quad \theta = \theta_0; \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$

Eksempler på former:

$$x = 2; \quad xy = 4; \quad x^2 - y^2 = 1; \quad x^2 + (y-3)^2 = 9$$



Symmetrier

Om x-akselen: $\theta \mapsto -\theta$

Om y-akselen: $(r, \theta) \mapsto (-r, -\theta)$

Om origo: $r \mapsto -r$

Stigningstall for kurve $r = f(\theta)$

Ved kjerneregelen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)}$$

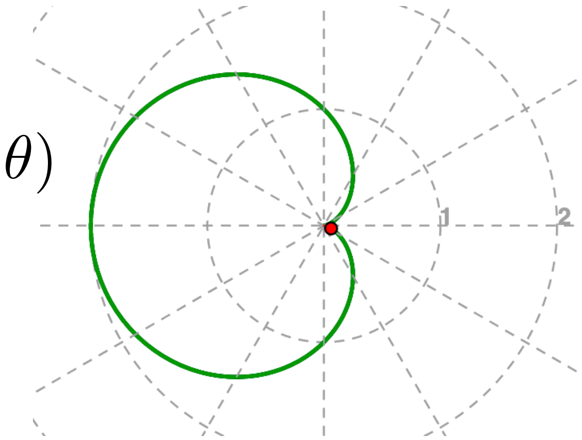
Dersom $f(\theta_0) = 0$ i et punkt (kurven passerer origo): $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

Buelengde i polarkoordinater

Buelengde av kurve $r = f(\theta)$, for $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$:

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left((f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2\right)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\theta$$

$r = 1 - \cos(\theta)$

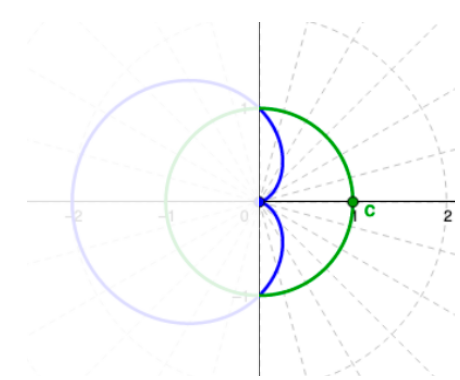


Kardiode

Areal i polarkoordinater

Region mellom to kurver og to vinkler:

$$S = \{\alpha < \theta < \beta, \; f_1(\theta) < r < f_2(\theta)\}$$



Areal ved integralet:

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left[(f_1(\theta))^2 - (f_2(\theta))^2\right] \, \mathrm{d}\theta$$

Repetisjon
lineær algebra (10.1–10.4)

Vektorrommet $\mathbb{R}^3$

Det euklidiske rommet (kartesiske koordinater)

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

er et eksempel på et reelt vektorrom V:

$$u + v = v + u \qquad 1u = u$$

$$(u + v) + w = u + (v + w) \qquad a(bu) = (ab)u$$

$$u + 0 = u \qquad a(u + v) = au + av$$

$$u + (-u) = 0 \qquad (a + b)u = au + bu$$

$$u, v, w \in V \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Avstand og lengde

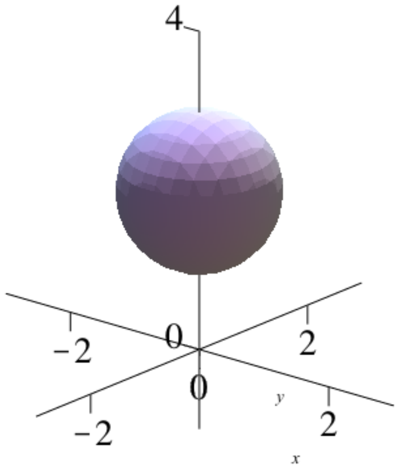
Lengde av vektor v = (x,y,z)

$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Avstandsformel

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Eksempel: enhetssfæren med sentrum i (0,0,2)



$$\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1\}$$

Skalarprodukt

Et skalarprodukt (indreprodukt) er en avbilding

$V \times V \to \mathbb{R}$ slik at $(u, v) \mapsto u \cdot v$

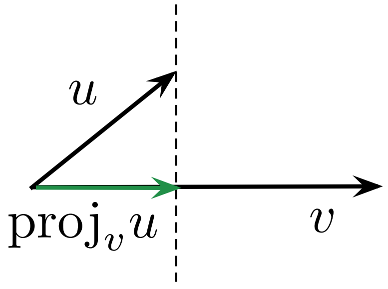
$$u \cdot v = v \cdot u$$
$$(\lambda u) \cdot v = u \cdot (\lambda v) = \lambda (u \cdot v), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$u \cdot (v + w) = u \cdot v + u \cdot w$$
$$u \cdot u \geq 0 \text{ med likhet kun for } u = 0$$

Spesielt: $u \cdot v \overset{\text{def.}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ er et skalarprodukt.

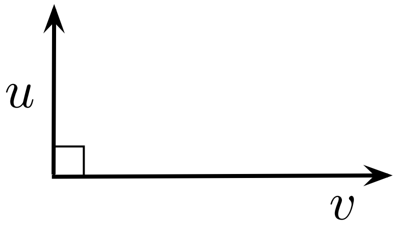
Det euklidiske skalarproduktet

For skalarproduktet $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ gjelder:

$$u \cdot u = |u|^2$$



$$\text{proj}_v u \overset{\text{def.}}{=} \frac{(u \cdot v)}{|v|^2} v, \qquad v \neq 0$$



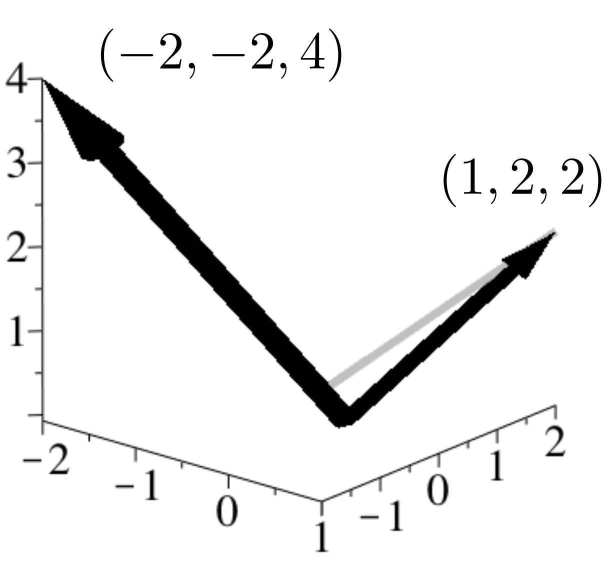
$$u \cdot v = 0 \quad \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{"}u \text{ er ortogonal med } v\text{"}$$

Eksempel: $u = (1,2,2)$, $v = (-2,-2,4)$

$$u \cdot v = 1(-2) + 2(-2) + 2(4) = 2$$

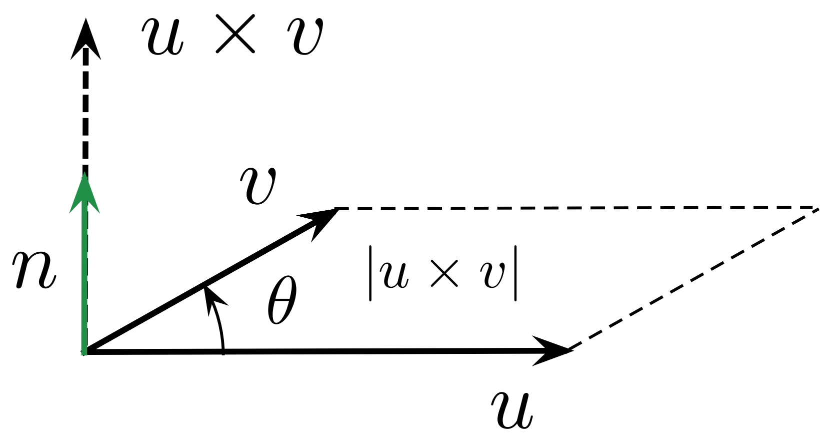
$$|v|^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 4^2 = 24$$

$$\text{proj}_v u = \tfrac{2}{24}(-2,-2,4) = \tfrac{1}{6}(-1,-1,2)$$



Kryssproduktet

For kryssproduktet $u \times v \overset{\text{def.}}{=} (|u||v|\sin(\theta))n$ gjelder:



$$(ru) \times (sv) = (rs)(u \times v)$$
$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$
$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w$$
$$u \times v = -(v \times u)$$
$$0 \times u = 0$$

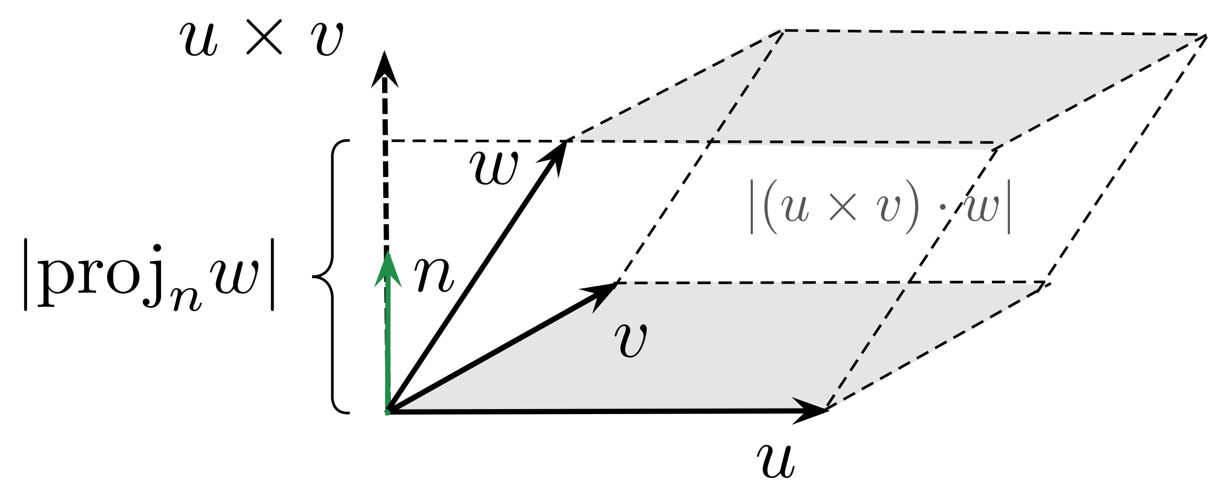
Spesielt er:

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3$$
$$= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Det skalare trippelproduktet

Ettersom

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$



$$= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3$$

er

$$(u \times v) \cdot w$$

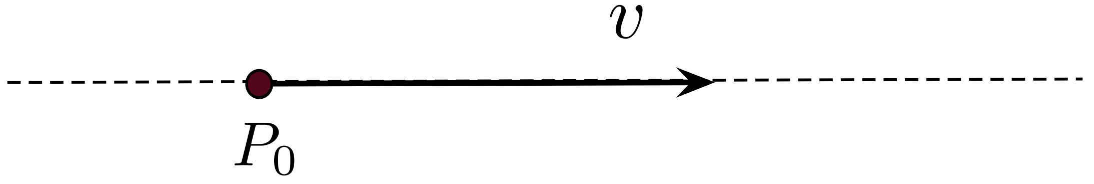
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3$$

$$= \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

Linje: ligning og avstand

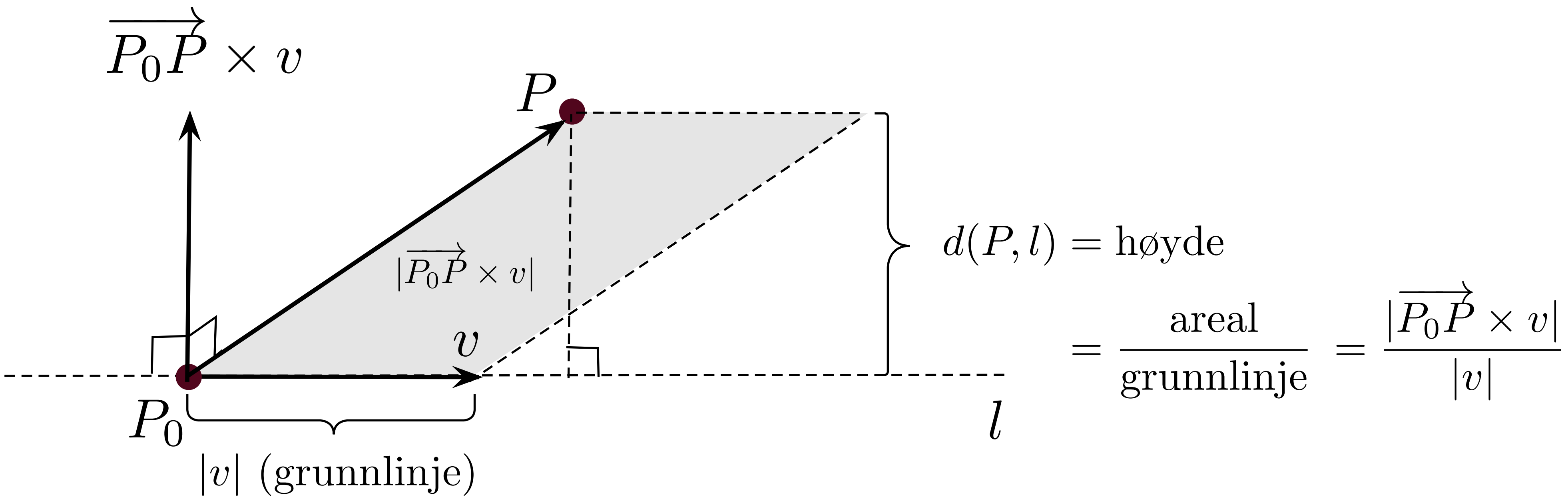
Linje gjennom punktet P_0 parallell med vektoren v

$$l = \{P_0 + tv \colon t \in \mathbb{R}\}$$



Avstand mellom et punkt P og en linje $l = P_0 + tv$

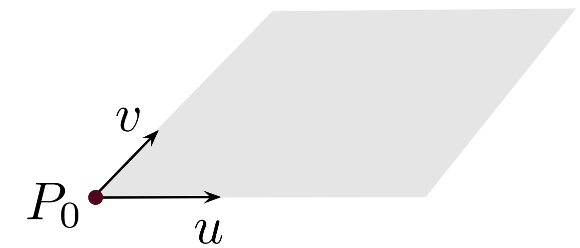
$$d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times v|}{|v|}$$



Plan: ligninger og avstand

Plan gjennom punktet P_0 generert av vektorene u, v

$$P = \{P_0 + su + tv \colon s, t \in \mathbb{R}\}$$



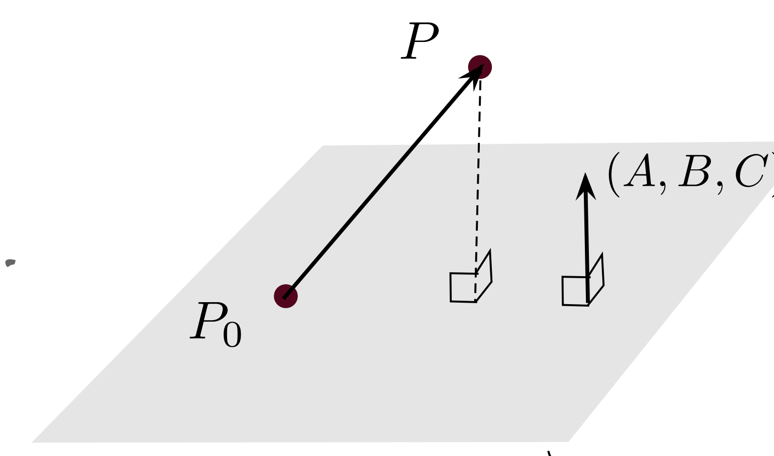
Plan gjennom punktet (x_0, y_0, z_0) ortogonalt mot vektoren (A, B, C)

$$P = \{(x, y, z) \colon \underbrace{A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0}_{Ax+By+Cz=D}\}$$

Avstand mellom et punkt P og et plan

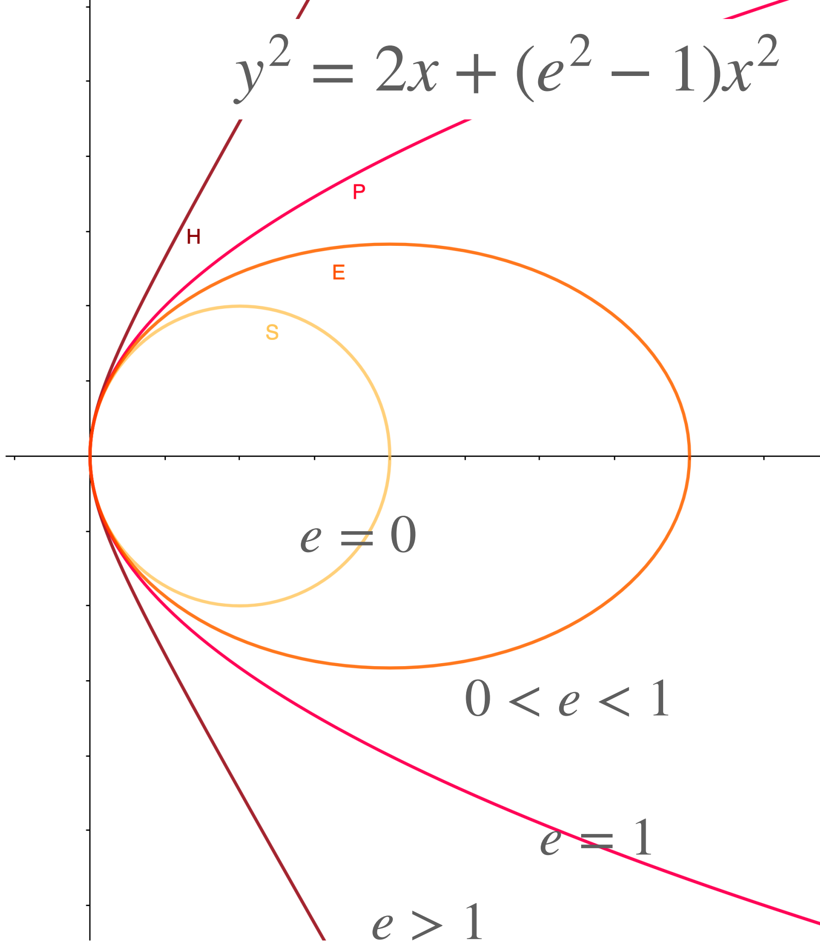
$Ax+By+Cz=D$ gjennom punktet $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

$$d(l, \{Ax + By + Cz = D\}) = \left| \overrightarrow{P_0P} \cdot \frac{(A, B, C)}{|(A, B, C)|} \right|$$



$d = |\text{proj}_{(A,B,C)} \overrightarrow{P_0P}|$

8.1 Kjeglesnitt



Familier av kurver som beskriver skjæringer mellom plan og en kjegle (dobbeltkon).

For tilfellet når kurvene er parallelle med x,y-aksene:

Sirkel: $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Ellipse: $$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Hyperbel: $$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Parabel: $$(y - y_0) = c(x - x_0)^2 \quad \text{eller} \quad (x - x_0) = c(y - y_0)^2$$

11.1 (og 11.3) Vektorevaluerte funksjoner

Funksjoner $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, kalles vektorevaluerte. De er kurver i $\mathbb{R}^n$.

$$I \ni t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

Kurven γ er kontinuerlig dersom γ_j er kontinuerlige for alle $j = 1, \ldots, n$.

Kurven γ er glatt dersom $|\dot{\gamma}| = \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{\gamma}_j^2\right)^{1/2} > 0$ på et gitt intervall.

Vektoren $v = \dot{\gamma}$ er hastigheten, skalaren $|v| = |\dot{\gamma}|$ er farten.

$T = \dfrac{v}{|v|}$ er enhetstangentvektoren. Den andrederiverte $a = \dot{v}$ er akselerasjonen.

Buelengden $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau$ er lengden av γ fra $\gamma(t_0)$ til $\gamma(t)$.