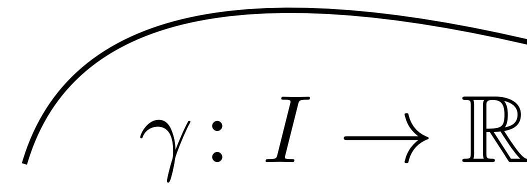
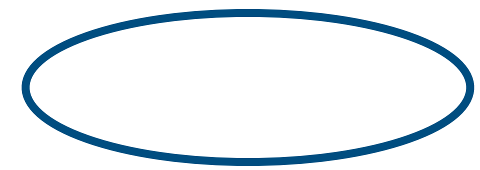
# 8.2-8.3 Kurver i planet

Kurve i planet: $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$



$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$

Kan være grafer eller mer generelle former, som en ellipse:



$$\gamma(t) = (a\sin(t), b\cos(t))$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

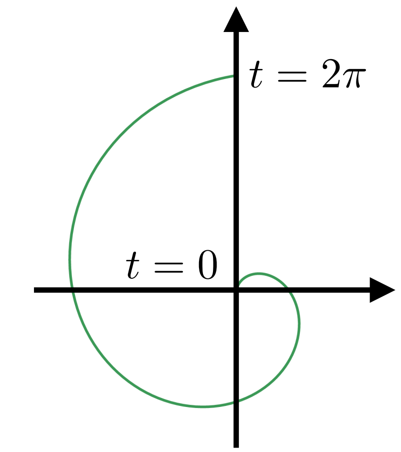
En glatt kurve er kontinuerlig deriverbar med $|\dot{\gamma}(t)| \neq 0$ overalt.

Stigningen $dy/dx$ er gitt ved $\frac{\dot{\gamma}_2(t)}{\dot{\gamma}_1(t)}$, så langt $\dot{\gamma}_1 \neq 0$.

Og den andrederiverte $y''(x)$ ved $\frac{\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_1 - \dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2}{(\dot{\gamma}_1)^3}$ med bruk av kjerneregelen.

# 8.4 Buelengde og areal

Buelengden $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\,\dot{\gamma}(\tau)\,|\, \mathrm{d}\tau$ er lengden på en kurve fra $\gamma(t_0)$ til $\gamma(t)$ .



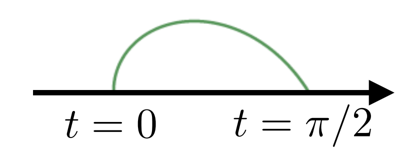

$(t\sin(t), t\cos(t))$

Størrelsen $ds = |\,\dot{\gamma}(t)\,|\, dt$ er buelengdeelementet.

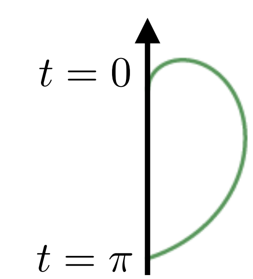
Dersom $|\,\dot{\gamma}(t)\,| = 1$ er $s = t$, og kurven sies være parameterisert ved buelengde.

En kurve parameterisert ved buelengde har lengden $s$ fra $\gamma(0)$ til $\gamma(s)$ .

Arealet mellom x-aksen og en kurve med $\dot{x}(t) \neq 0$ er gitt ved $A = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} y(t)\dot{x}(t)\,\mathrm{d}t$.




Tilsvarende formel, $A = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} x(t)\dot{y}(t)\,\mathrm{d}t$, gjelder for arealet mellom en kurve og y-aksen.

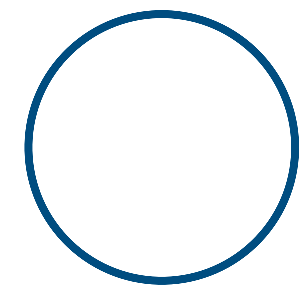


# 8.5–8.6 Kurver i polarkoordinater

Polarkoordinater og kartesiske koordinater:

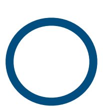
$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\sin(\theta)$$

Enhetssirkelen: $$x^2 + y^2 = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$$



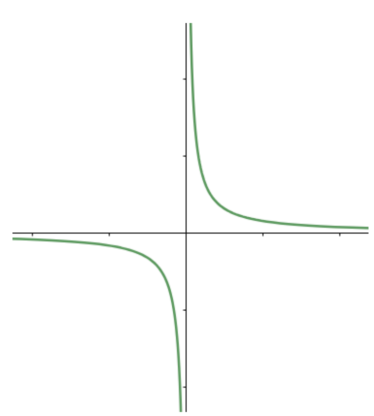
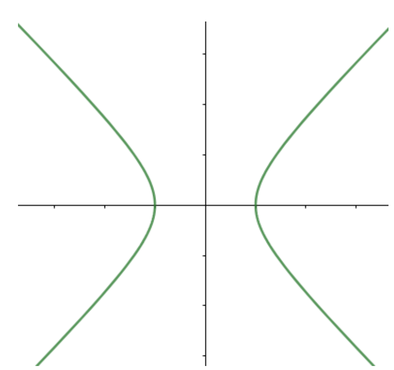
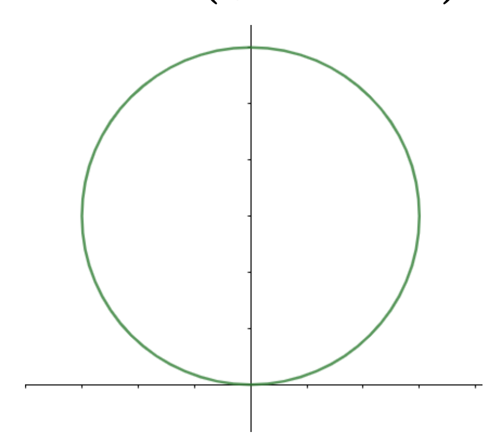
Noen vanlige tilfeller:

$$r = r_0; \quad \theta = \theta_0; \quad r_1 \leq r \leq r_2; \quad \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$$




Eksempler på former:

$$x = 2; \quad xy = 4; \quad x^2 - y^2 = 1; \quad x^2 + (y-3)^2 = 9$$

# Symmetrier

Om x-akselen: $$\theta \mapsto -\theta$$

Om y-akselen: $$(r, \theta) \mapsto (-r, -\theta)$$

Om origo: $$r \mapsto -r$$

# Stigningstall for kurve $r = f(\theta)$

Ved kjerneregelen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta}\frac{d\theta}{dx} = \frac{f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)}$$

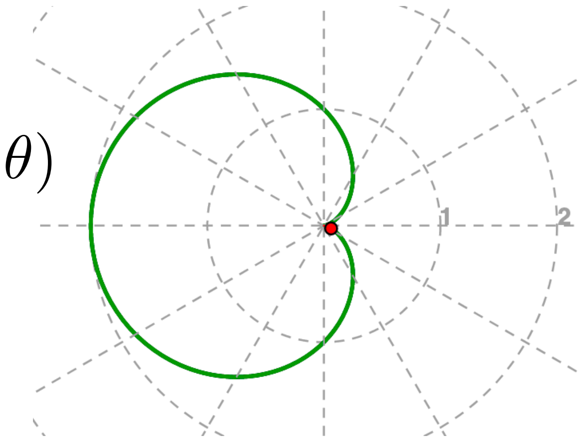
Dersom $f(\theta_0) = 0$ i et punkt (kurven passerer origo): $$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \tan(\theta)$$

# Buelengde i polarkoordinater

Buelengde av kurve $r = f(\theta)$, for $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$:

$$L(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left((f(\theta))^2 + (f'(\theta))^2\right)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}\theta$$

$r = 1 - \cos(\theta)$



Kardiode

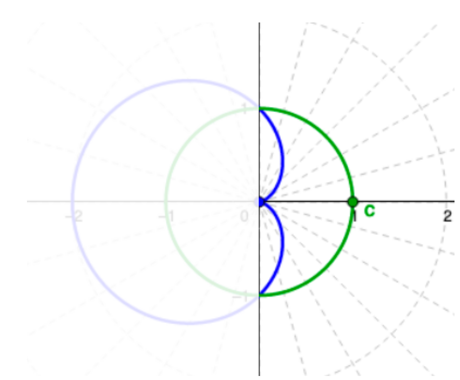
# Areal i polarkoordinater

Region mellom to kurver og to vinkler:

$$S = \{\alpha < \theta < \beta,\ f_1(\theta) < r < f_2(\theta)\}$$

Areal ved integralet:

$$A(S) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left[(f_1(\theta))^2 - (f_2(\theta))^2\right] \, \mathrm{d}\theta$$



# Repetisjon
# lineær algebra (10.1–10.4)

# Vektorrommet $R^3$

Det euklidiske rommet (kartesiske koordinater)

$$\mathbb{R}^3 := \{(x, y, z) \colon x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

er et eksempel på et reelt vektorrom V:

$$u + v = v + u \qquad 1u = u$$
$$(u+v)+w = u+(v+w) \qquad a(bu) = (ab)u$$
$$u + 0 = u \qquad a(u+v) = au + av$$
$$u + (-u) = 0 \qquad (a+b)u = au + bu$$
$$u, v, w \in V \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

# Avstand og lengde

Lengde av vektor v = (x,y,z)

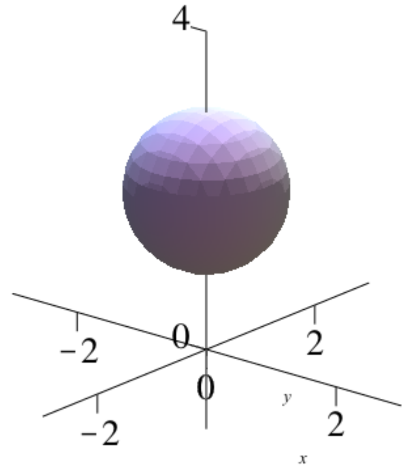
$$|v| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Avstandsformel

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Eksempel: enhetssfæren med sentrum i (0,0,2)

$$\{x, y, z \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1\}$$



# Skalarprodukt

Et skalarprodukt (indreprodukt) er en avbilding

$$V \times V \to \mathbb{R} \qquad (u, v) \mapsto u \cdot v$$

slik at

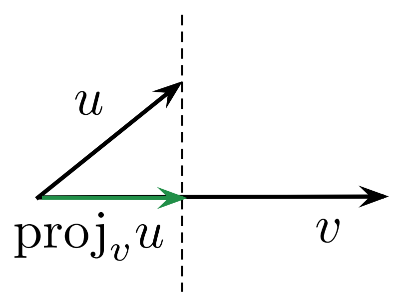
$$\boxed{\begin{aligned} u \cdot v &= v \cdot u \\ (\lambda u) \cdot v &= u \cdot (\lambda v) = \lambda(u \cdot v), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ u \cdot (v + w) &= u \cdot v + u \cdot w \\ u \cdot u &\geq 0 \text{ med likhet kun for } u = 0 \end{aligned}}$$

Spesielt: $u \cdot v \overset{\text{def.}}{=} u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ er et skalarprodukt.

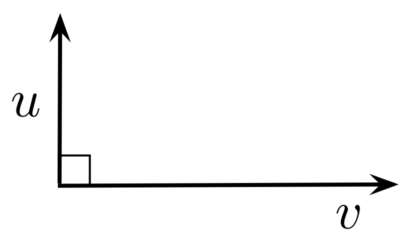
# Det euklidiske skalarproduktet

For skalarproduktet $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$ gjelder:

$$u \cdot u = |u|^2$$




$$\mathrm{proj}_v u \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{(u \cdot v)}{|v|^2} v, \qquad v \neq 0$$



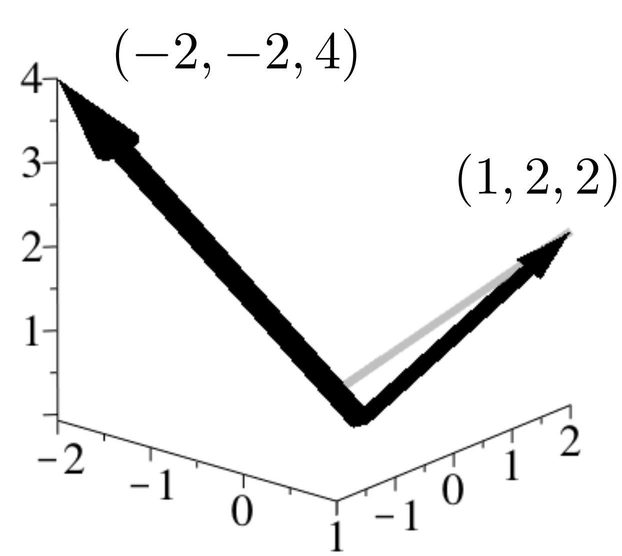

$$u \cdot v = 0 \quad \stackrel{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \quad \text{"}u \text{ er ortogonal med } v\text{"}$$

Eksempel: $u = (1,2,2)$, $v = (-2,-2,4)$

$$u \cdot v = 1(-2) + 2(-2) + 2(4) = 2$$

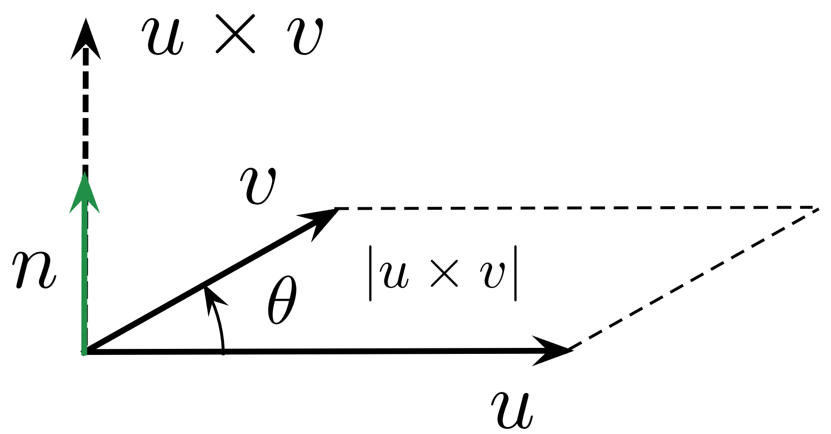
$$|v|^2 = (-2)^2 + (-2)^2 + 4^2 = 24$$

$$\mathrm{proj}_v u = \tfrac{2}{24}(-2,-2,4) = \tfrac{1}{6}(-1,-1,2)$$



# Kryssproduktet

*For kryssproduktet* $u \times v \overset{\text{def.}}{=} (|u||v|\sin(\theta))n$ *gjelder:*




$$(ru) \times (sv) = (rs)(u \times v)$$
$$u \times (v + w) = u \times v + u \times w$$
$$(u + v) \times w = u \times w + v \times w$$
$$u \times v = -(v \times u)$$
$$0 \times u = 0$$

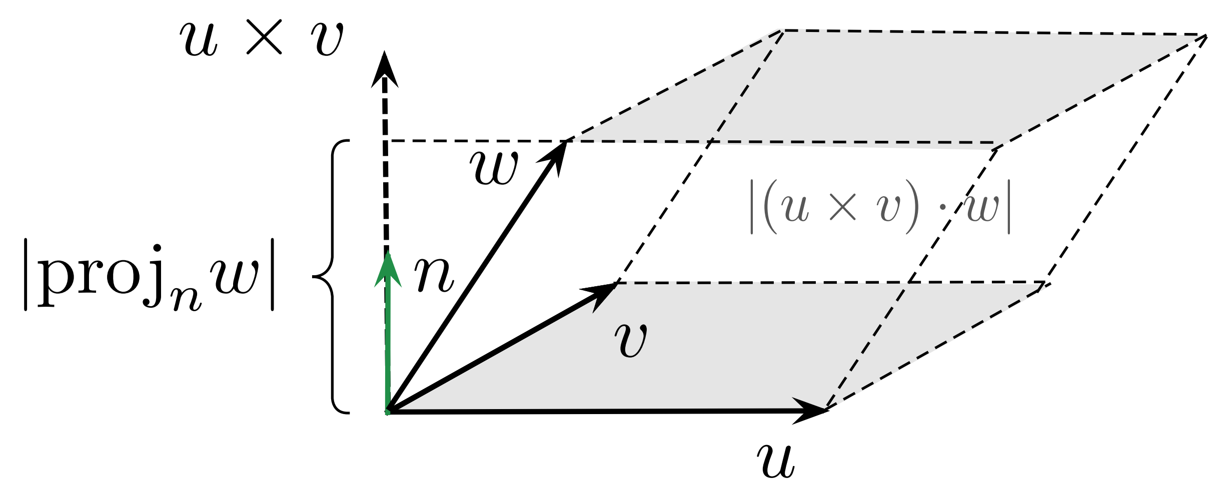
*Spesielt er:*

$$\begin{aligned} u \times v &= \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3 \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1) \end{aligned}$$

# Det skalare trippelproduktet

Ettersom

$$u \times v = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$




$$= (u_2v_3 - u_3v_2)e_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)e_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)e_3$$

er

$$(u \times v) \cdot w$$

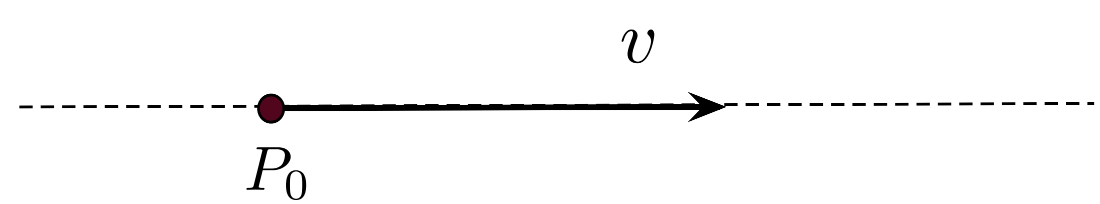
$$= (u_2v_3 - u_3v_2)w_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)w_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)w_3$$

$$= \det \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

# Linje: ligning og avstand

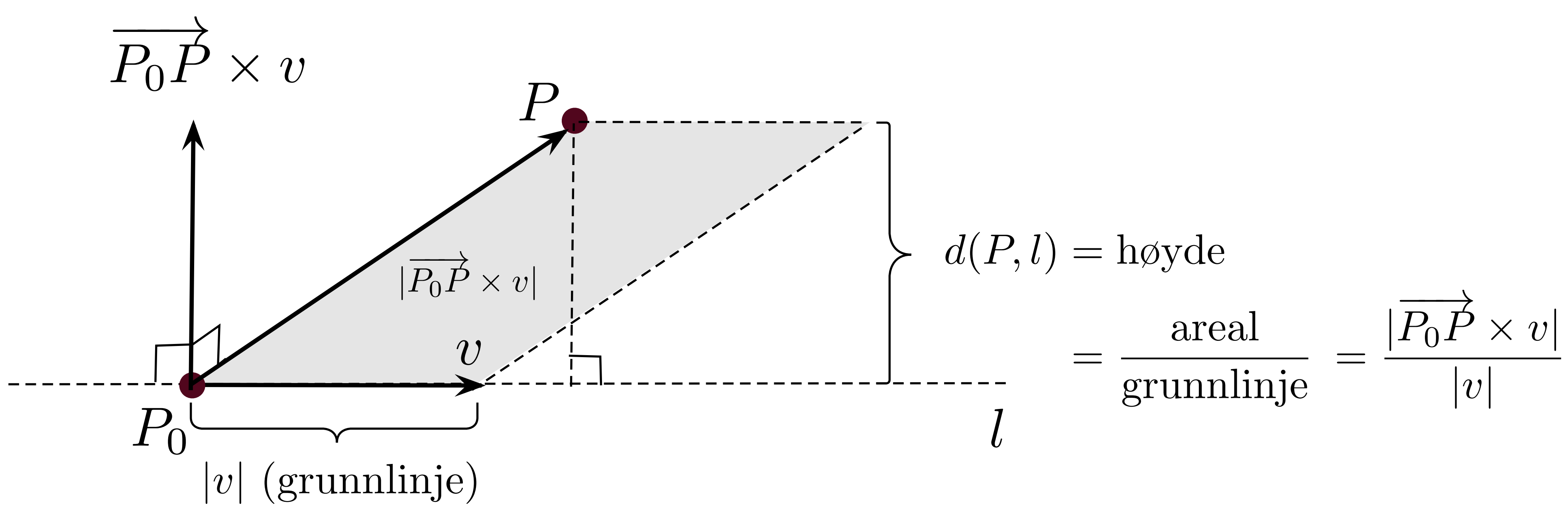
Linje gjennom punktet $P_0$ parallell med vektoren $v$

$$\boxed{l = \{P_0 + tv \colon t \in \mathbb{R}\}}$$




Avstand mellom et punkt $P$ og en linje $l = P_0 + tv$

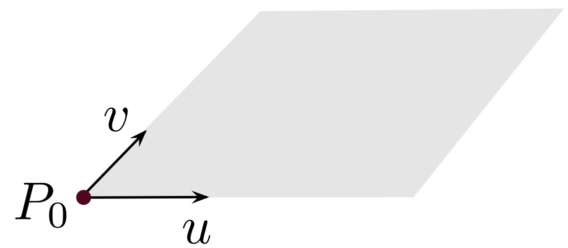
$$\boxed{d(P_0, l) = \frac{|\overrightarrow{P_0P} \times v|}{|v|}}$$



# Plan: ligninger og avstand

Plan gjennom punktet $P_0$ generert av vektorene $u$, $v$

$$P = \{P_0 + su + tv \colon s, t \in \mathbb{R}\}$$



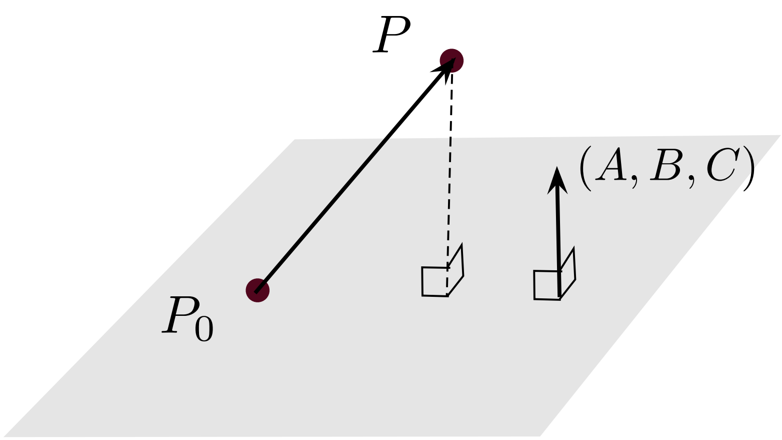

Plan gjennom punktet $(x_0,y_0,z_0)$ ortogonalt mot vektoren $(A,B,C)$

$$P = \{(x,y,z) \colon \underbrace{A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0}_{Ax+By+Cz=D}\}$$

Avstand mellom et punkt $P$ og et plan

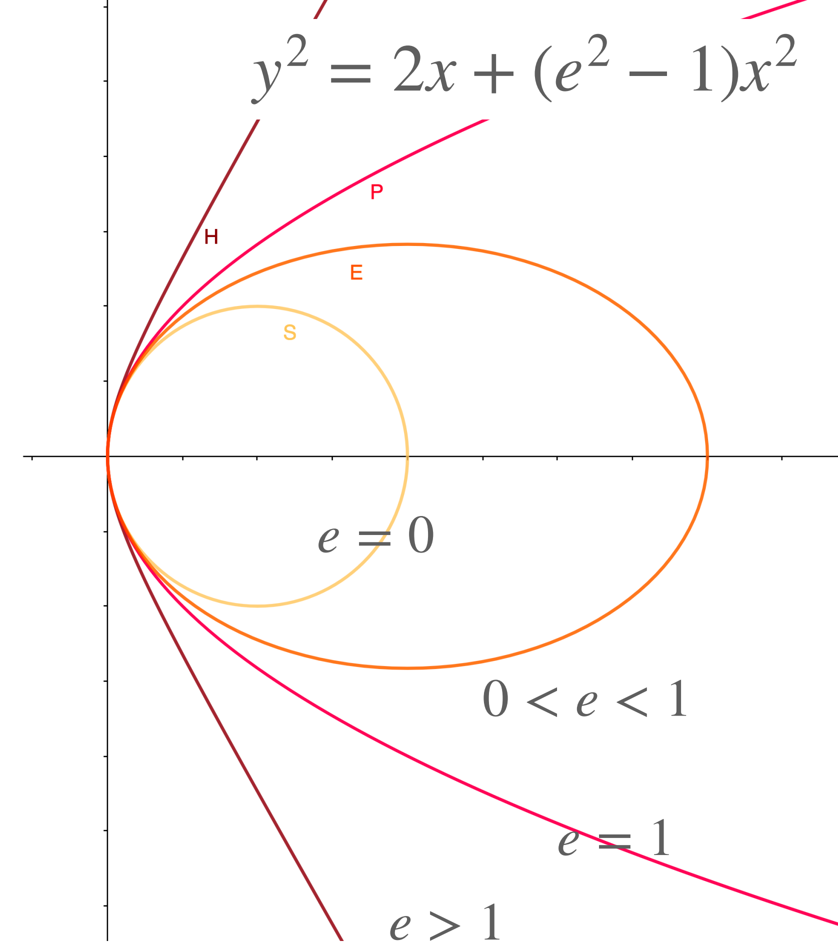
$Ax+By+Cz=D$ gjennom punktet $P_0=(x_0,y_0,z_0)$.

$$d(l, \{Ax+By+Cz=D\}) = \left|\overrightarrow{P_0P} \cdot \frac{(A,B,C)}{|(A,B,C)|}\right|$$




$d = |\mathrm{proj}_{(A,B,C)}\overrightarrow{P_0P}|$

# 8.1 Kjeglesnitt




Familier av kurver som beskriver skjæringer mellom plan og en kjegle (dobbeltkon).

For tilfellet når kurvene er parallelle med x,y-aksene:

For tilfellet når kurvene er parallelle med x,y-aksene:

Sirkel: $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Ellipse: $$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Hyperbel: $$\left(\frac{x - x_0}{a}\right)^2 - \left(\frac{y - y_0}{b}\right)^2 = 1$$

Parabel: $$(y - y_0) = c(x - x_0)^2 \quad \text{eller} \quad (x - x_0) = c(y - y_0)^2$$

# 11.1 (og 11.3) Vektorevaluerte funksjoner

Funksjoner $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, kalles vektorevaluerte. De er kurver i $\mathbb{R}^n$.

$$I \ni t \mapsto \gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \in \mathbb{R}^n$$

Kurven $\gamma$ er kontinuerlig dersom $\gamma_j$ er kontinuerlige for alle $j = 1, \ldots, n$ .

Kurven $\gamma$ er glatt dersom $|\dot{\gamma}| = \left(\sum_{j=1}^{n} \dot{\gamma}_j^2\right)^{1/2} > 0$ på et gitt intervall.

Vektoren $v = \dot{\gamma}$ er hastigheten, skalaren $|v| = |\dot{\gamma}|$ er farten.

$T = \dfrac{v}{|v|}$ er enhetstangentvektoren. Den andrederiverte $a = \dot{v}$ er akselerasjonen.

Buelengden $s(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot{\gamma}(\tau)| \, \mathrm{d}\tau$ er lengden av $\gamma$ fra $\gamma(t_0)$ til $\gamma(t)$.

# Eksamen

- To deler i eksamen: 2 prosjektinnleveringer med kompletterende muntlig, og hjemmeeksamen tilsvarende 60% i omfattelse og vekting.

- **Prosjektinnlevering 1**: I **mars**, minst 3 ukers frist, cirka 2 sider håndskrevet, individuell eller i par (som man selv ønsker).

- **Prosjektinnlevering 2**: I **april**, minst 3 ukers frist, cirka 2 sider håndskrevet, individuell eller i par (som man selv ønsker).

- **Justerende muntlig**: Kort individuell prøve over zoom på materialet innlevert i prosjektoppgaven. Obs! cirka fem minutter/person. Å kunne: forklare sin innlevering og begreper brukt i denne.

- **Hjemmeeksamen**: tidsbegrenset, alle hjelpemidler, mer vekt ved forklaring og forståelse. Håndskrevet scannet. Tilsvarende 60% i omfang og vekting.

# 11.4 Krumning, torsjon og Frenetrammen

$T = \dfrac{v}{|v|} = \dfrac{\dot{\gamma}}{|\dot{\gamma}|}$ enhetstangent, $s = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |v|\,\mathrm{d}t$ buelengdevariabel.

Krumning $\kappa = \left|\dfrac{dT}{ds}\right| = \dfrac{1}{|v|}\left|\dfrac{dT}{dt}\right|.$

Enhetsnormal $N = \dfrac{dT/ds}{\left|dT/ds\right|} = \dfrac{1}{\kappa}\dfrac{dT}{ds}.$ Ved kjerneregelen: $N = \dfrac{dT/dt}{\left|dT/dt\right|}$.

Obs. at $N \perp T$, så $\{T, N\}$ er et lokalt koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ (ON-system).

I $\mathbb{R}^3$ gir $B = T \times N$ en tredje ortogonal enhetsvektor. Det lokale koordinat-systemet $\{T, N, B\}$ kalles Frenetrammen.

Torsjon er skalaren $\tau(s)$ gitt ved $\dfrac{dB}{ds} = -\,\tau(s)N.$

# 12.1 Funksjoner av flere variabler

Tenk: $F(x, y) = x^2 + y^2$

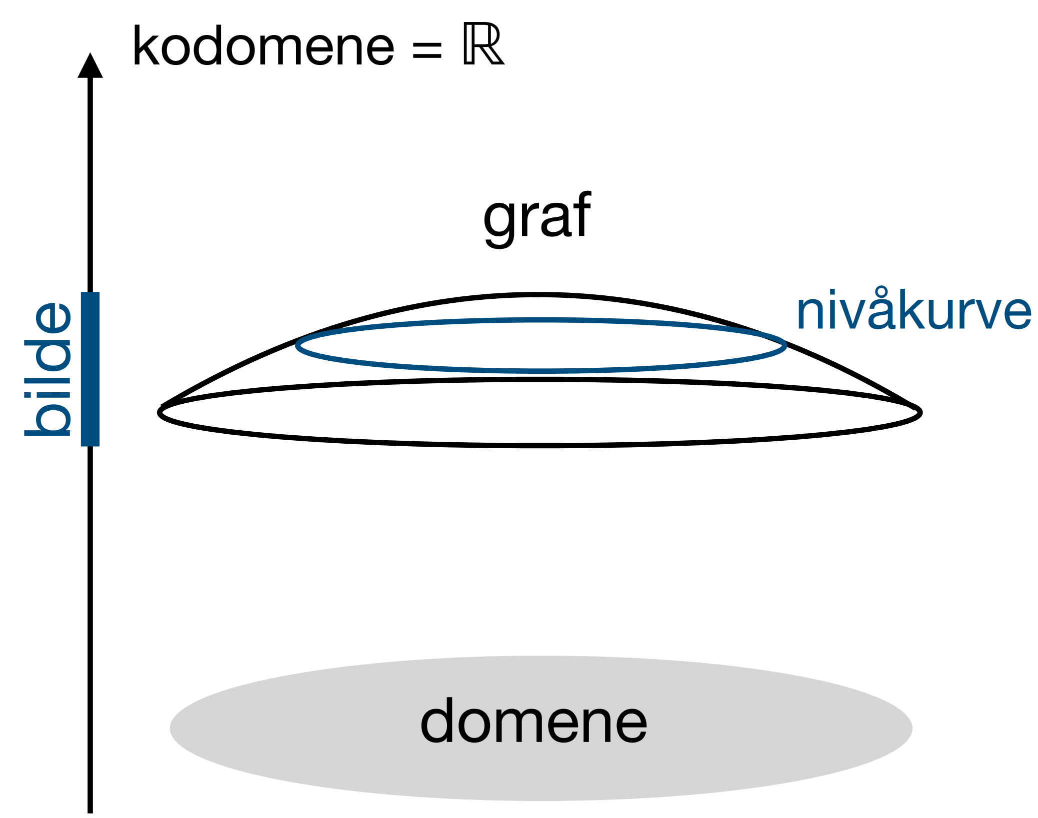
Generelt $F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto F(x) = F(x_1, \ldots, x_n)$

$U$ er domene (definisjonsmengde), $F(U)$ bilde, og $\mathbb{R}$ kodomene.

$\{x \in \mathbb{R}^n\colon F(x) \in \mathbb{R}\}$ naturlig definisjonsmengde.

$\{x \in \mathbb{R}^n\colon F(x) = c\}$ er nivåmengde.

$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon F(x_1, x_2) = c\}$ nivåkurve.



# Åpne og lukkede mengder

Et punkt $x_0$ er et **indre punkt i** $U$ dersom $B_\varepsilon(x_0) \subset U$ for et tilstrekkelig litet $\varepsilon > 0$.

$x_0$ er et **randpunkt til U** dersom $B_\varepsilon(x_0) \cap U \neq \varnothing$ men $B_\varepsilon(x_0) \not\subset U$ uansett $\varepsilon > 0$.

$\partial U$ er **randen til** $U$**,** mengden av alle randpunkter til $U$.

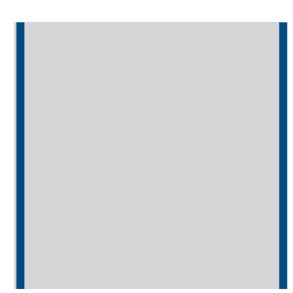
$\overline{U} = U \cup \partial U$ er **tillukningen** av $U$.

$U$ er **åpen** dersom alle dets punkter er indre punkter.

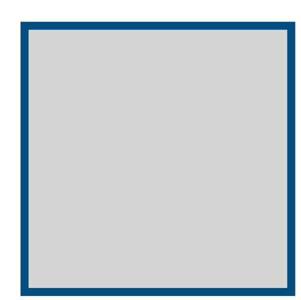
$U$ er **lukket** dersom alle dets randpunkter tilhører $U$.



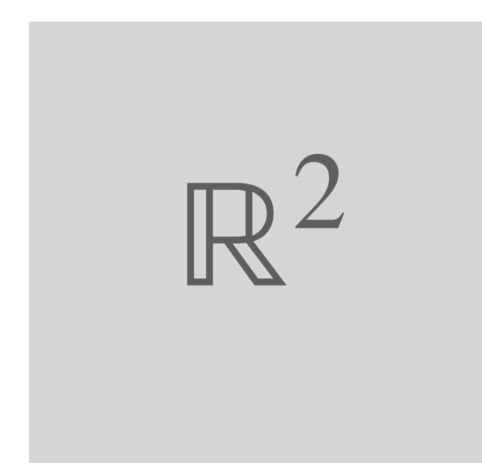
åpen



ikke åpen
ikke lukket



lukket




både åpen og lukket

$(\partial\mathbb{R}^2 = \varnothing)$

# 12.2 Grenseverdier og kontinuitet

**Grenseverdi** i $x_0 \in \overline{U}$: $\quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x) - L| < \varepsilon \quad$ for $x \in U$.

**Kontinuitet** i $x_0 \in U$: $\quad |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon \quad$ for $x \in U$.

Obs. $|x - y| = \left((x_1 - y_1)^2 + \ldots (x_n - y_n)^2\right)^{\frac{1}{2}}$ euklidisk lengde i $\mathbb{R}^n$, men $|F(x) - F(y)|$ vanlig absoluttbeløp på $\mathbb{R}$.

F kontinuerlig på en mengde dersom den er kontinuerlig i alle punkter i mengden.

Summer og produkter av kontinuerlige funksjoner er kontinuerlige.

# Differensialkalkyl (12.3–12.7)

$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad x_0 \in U$ indre punkt, $\quad v \in \mathbb{R}^n$ med $|v| = 1$ enhetsvektor

$\partial_v F(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{F(x_0 + hv) - F(x_0)}{h}$ er den **retningsderiverte** i punktet $x_0$ i retning $v$.

Når $v = e_j$ er en basisvektor i retning $x_j$ er dette den **partielt deriverte**:

Dersom $f(x_j) = F(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$, er $\partial_{x_j} F(x_1, \ldots, x_n) = f'(x_j)$ den partielt deriverte i retning $x_j$.

Deriverte kan også skrives $\dfrac{\partial F}{\partial x_j}$, $D_{x_j}F$, $F'_{x_j}$, og på mange andre måter…

Tangentplanen til grafen $\{z = F(x, y)\colon (x, y) \in U\}$ i punktet $(x_0, y_0, \underbrace{F(x_0, y_0)}_{z_0})$ gis av

$$\boxed{z = F(x_0, y_0) + (x - x_0)F'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)F'_y(x_0, y_0)}$$

Alternativt: $\qquad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \underbrace{(F'_x, F'_y, -1)}_{\text{normal til TP}} = 0$

# Gradient og deriverbarhet

**Gradienten** $\nabla F = (\partial_{x_1} F, \ldots, \partial_{x_n} F)$ er vektoren av partielt deriverte, en *funksjon* $U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Funksjonen $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2$, har gradient $\nabla F(x, y) = (2x, 2y)$.

Tangentplanet kan nå skrives: $z = z_0 + (x - x_0, y - y_0) \cdot \nabla F(x_0, y_0)$.

Noe som fører oss til deriverbarhet:

$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er **deriverbar** i et indre punkt $x_0 \in U$ dersom

$$\boxed{F(x_0 + h) = F(x_0) + h \cdot \nabla F(x_0) + |h| \varepsilon(h), \qquad \lim_{|h| \to 0} \varepsilon(h) = 0.}$$

– $\nabla F(x_0)$ er den **deriverte** til $F$ i $x_0$.
– $F(x_0) + h \cdot \nabla F(x_0)$ er **lineariseringen** til $F$ i punktet $x_0$ (i retning h, det er den som varierer).
– $|h| \varepsilon(h)$ skrives iblandt $o(h)$.
– $h$ er en (liten) vektor, tenk $h = x - x_0$ og $x = x_0 + h$.

# Klassen $C^1(U, \mathbb{R})$ og en kjerneregel

Dersom $\nabla F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ er kontinuerlig, d v s dersom alle de partielt deriverte $\partial_{x_j} F$ er kontinuerlige $x \mapsto \partial_{x_j} F(x)$, så kalles $F$ **kontinuerlig deriverbar**. Dette skrives $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ .

Kontinuerlig deriverbarhet impliserer deriverbarhet:

$$F \in C^1(U, \mathbb{R}) \quad \Rightarrow \quad F \text{ deriverbar.}$$

**En kjerneregel.** $F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \gamma\colon I \subset \mathbb{R} \to U,$

$$F \circ \gamma : I \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto F \circ \gamma(x) = F(\gamma(x))$$

Dersom $F$ og $\gamma$ er deriverbare, eksisterer $\dfrac{d}{dt} F \circ \gamma(t) = \nabla F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)$ .

**Korollar:** Den retningsderiverte gis av formelen $\partial_v F(x_0) = \nabla F(x_0) \cdot v$ når $F$ er deriverbar i $x_0$. Bevis: betrakt $\gamma(t) = x_0 + tv$ i kjerneregelen.

# 12.4 Høyere deriverte

Deriverte funksjoner kan bli derivert: $\partial_x \partial_y (x^2 e^{3y}) = \partial_x (3x^2 e^{3y}) = 6x e^{3y}$ .

**Schwarz teorem.** $F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Dersom $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}F$ er kontinuerlige for alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ i et indre punkt $x \in U$, så kommuterer andre ordens deriverte i det punktet:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}F(x) = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}F(x), \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

**Teoremet er en implikasjon, ikke en karakterisering:** finnes funksjoner som ikke oppfyller $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}F(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\dfrac{\partial}{\partial x_i}F(x)$; men finnes også slike som oppfyller det med svakere vilkår enn antakelsene i teoremet.

---

Funksjonen $(x, y) \mapsto \dfrac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$ utvidet kontinuerlig til $0$ i origo, er et eksempel på en funksjon med retningsderiverte i origo, men som ikke er deriverbar (der).

# Funksjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Generelle eksempler:

- En flyrute over tid: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- Høyden over havet på et topografisk kart: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Parameteriseringen av et plan eller en sfære i tre dimensioner: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- Variabelbytten: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Matriser/lineære avbildninger (f.eks. totalkostnad av produkter i forskjellige kategorier): $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- Artifisielle neurale nettverk (f.eks. kobling fra musikkvideor til preferansegrupper): $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

---

**Eksempel.** $F\colon [0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $\quad (r,\theta) \mapsto F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Beskriver polarkoordinater i kartesiske: $\quad (x,y) = (F_1(r,\theta)), F_2(r,\theta))$.

$(r,\theta) \mapsto F_1(r,\theta)$ kontinuerlig deriverbar med gradient $\nabla F_1(r,\theta) = (\cos\theta, -r\sin\theta)$.

$(r,\theta) \mapsto F_2(r,\theta)$ kontinuerlig deriverbar med gradient $\nabla F_2(r,\theta) = (\sin\theta, r\cos\theta)$.

$DF(r,\theta) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(r,\theta) \\ \nabla F_2(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ er den **deriverte** til F, også nevnt **Jacobimatrisen**.

For generelle funksjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ blir den deriverte

$$DF = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$ en $m \times n$-Jacobimatrise.

**Den generelle kjerneregelen.** $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad G\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n.$

For én komponent $F_j$ av $F$, og $\gamma(t_i) = G(\ldots, t_i, \ldots)$ avhengig av kun én variabel, har vi den tidligere kjerneregelen

$$\frac{d}{dt_i} F_j \circ \gamma = \nabla F_j(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt_i} = \begin{bmatrix} \nabla F_j(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\gamma}{dt_i} \end{bmatrix}.$$

Så for $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$ blir $\quad \frac{d}{dt_i} F \circ \gamma = \begin{bmatrix} \nabla F_1(\gamma) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\gamma}{dt_i} \end{bmatrix} = [DF] \begin{bmatrix} \frac{\partial G}{\partial t_i} \end{bmatrix} \qquad [m \times n][n \times 1]$

Og for $G = G(t_1, \ldots, t_r)$ blir $\quad \underset{[m \times r]}{D(F \circ G)} = \begin{bmatrix} (\nabla F_1) \circ G \\ \vdots \\ (\nabla F_m) \circ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla G_1 \\ \vdots \\ \nabla G_n \end{bmatrix} = \underset{[m \times n][n \times r]}{\big[(DF) \circ G\big]\,[DG]}.$

# 12.8 Implisitt derivasjon

**Implisitt derivasjon er derivasjon av en likhet *som om* en variabel varierte med en annen.**

Eksempel: $y - x^2 = 0.$

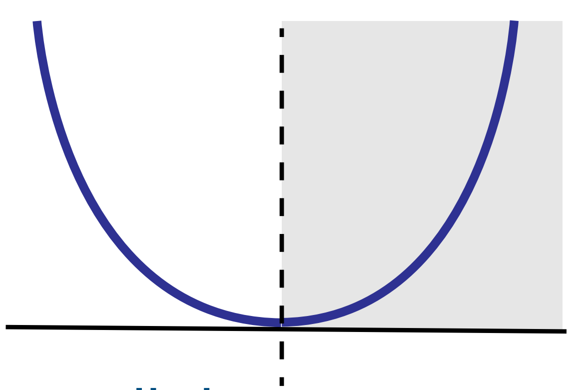
Med hensikt på $x$: $\dfrac{d}{dx}(y(x) - x^2) = \dfrac{d}{dx}0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 2x\,.$

Med hensikt på $y$: $\dfrac{d}{dy}(y - x(y)^2) = \dfrac{d}{dy}0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2x(y)x'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x'(y) = \dfrac{1}{2x(y)}.$

*Dersom* $x \neq 0.$

$x \mapsto y = x^2$ er en funksjon for alle $x \in \mathbb{R}$ .

$y \mapsto x = \pm\sqrt{y}$ er to *forskjellige* funksjoner, som skilles i $x = 0.$

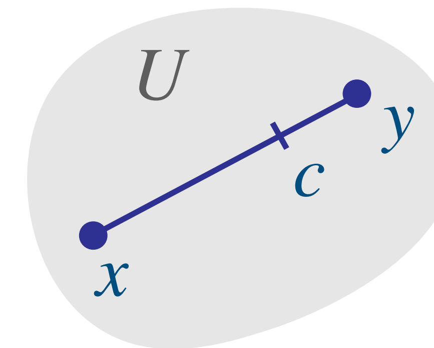


Vi skal se: dersom en implisitt deriverte kan beregnes, finnes den er og er riktig.

$$\boxed{y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \quad \text{for et punkt } (x_0, y_0) \text{ på kurven } F(x, y) = c \text{ når } F'_y(x_0, y_0) \neq 0.}$$

# 12.9 Taylors formel, Taylorrekker

**Middelverdisetning for $F \in C^1(U, \mathbb{R}), \quad U \subset \mathbb{R}^n$.**




$$\boxed{F(y) - F(x) = \nabla F(c) \cdot (y - x)}$$

Skriv $x = x_0$ og $y = x_0 + h \quad \Rightarrow$ 'minste Taylor': $\quad F(x_0 + h) = F(x_0) + \nabla F(c) \cdot h$

**Taylor's formel for $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:**

$$F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = F(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 F'_x(x_0, y_0) + h_2 F'_y(x_0, y_0)}_{h \cdot \nabla F} + \frac{1}{2} \underbrace{h_1^2 F''_{xx}(c_1, c_2) + 2h_1 h_2 F''_{xy}(c_1, c_2) + h_2^2 F''_{yy}(c_1, c_2)}$$

$$D^2F(h, h) = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1}F & \dots & \partial_{x_1}\partial_{x_2}F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1}F & \dots & \partial_{x_n}\partial_{x_n}F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

'Hessian'

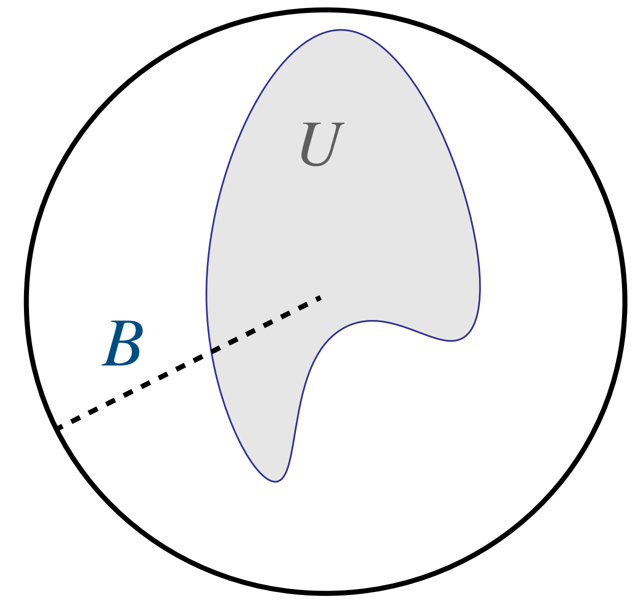
Taylorpolynomer er unike: har vi funnet ett, har vi funnet det riktige.

**Generelt for $F \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$:**

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + DF(x_0)(h) + \frac{1}{2} D^2F[x_0](h, h) + \cdots + \frac{1}{k!} D^kF[x_0](h, \dots, h) + \overbrace{O(|h|^{k+1})}^{\leq C|h|^{k+1}}$$

# Grunnleggende setninger for funksjoner

$U \subset \mathbb{R}^n$ begrenset dersom $|x| \leq B$ for alle $x \in U$.

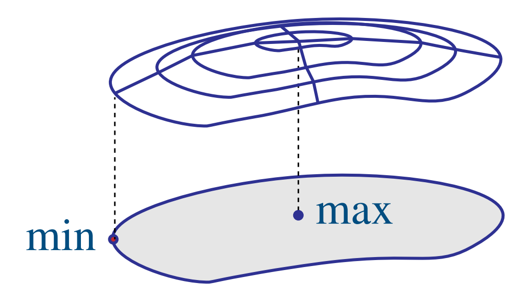



**Bolzano–Weierstrass**: hver følge $\{x_j\}_j$ i en begrenset mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ har en delfølge som konverger: $x_{j_k} \to x_0 \in \overline{U}$.

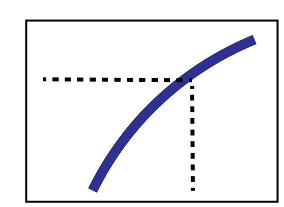
**Heine–Borel**: $U \subset \mathbb{R}^n$ begrenset og lukket $\quad\Leftrightarrow\quad$ $U$ kompakt
(hver følge i $U$ har en delfølge som konvergerer, til et element i $U$).

**Ekstremalverdisetningen**: $F \in C(U, \mathbb{R})$ med $U$ kompakt $\Rightarrow$ eksisterer $x_0 \in U$;

$$F(x_0) = \max_{x \in U} F(x)$$




**Omvendte funksjonssetningen** (kort): $F'(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists F^{-1}$ nært $y_0 = F(x_0)$.



**Implisitte funksjonssetningen** (kort):

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists y = y(x);\ F(x, y(x)) = 0 \text{ nært } (x_0, y_0).$$

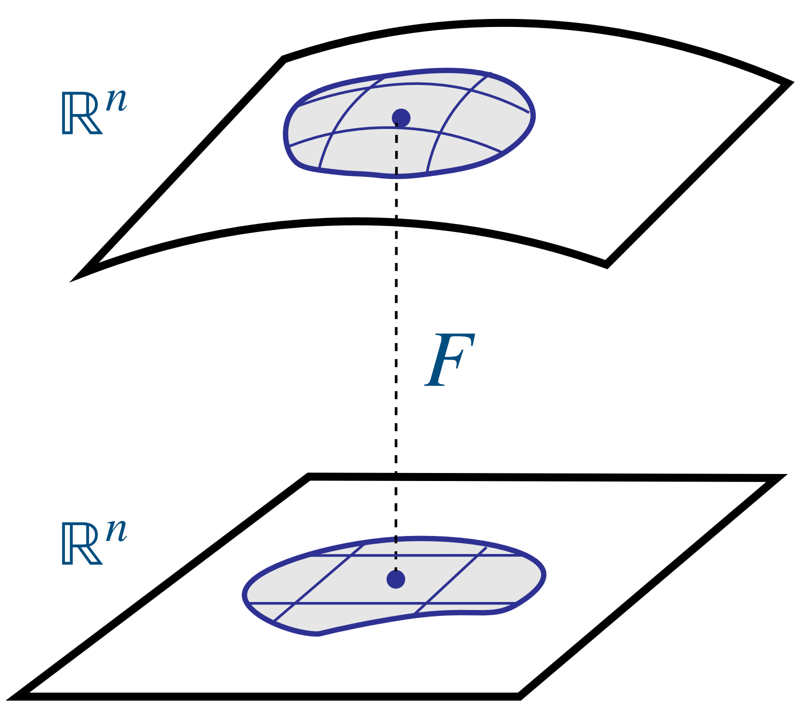
# Omvendte funksjonssetningen

$U \subset \mathbb{R}^n$ åpen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ med **Jacobimatrisen** $DF[x_0]$ **omvendbar** $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

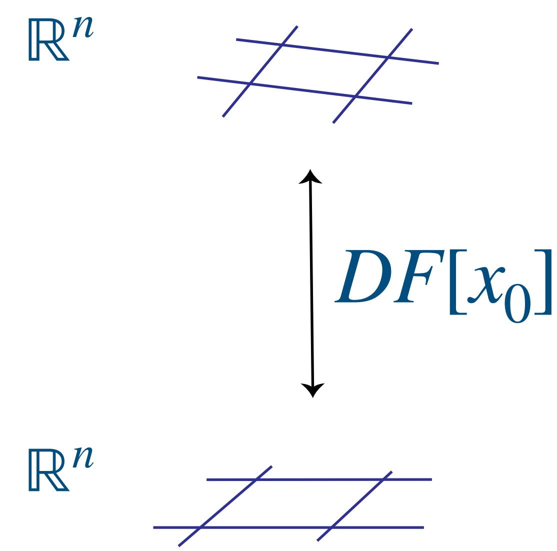
$\Rightarrow \quad \exists \tilde{U} \ni x_0$ sånn at $F\colon \tilde{U} \to F(\tilde{U})$ er omvendbar.

Videre: $F(\tilde{U})$ er en åpen mengde kring $y_0 = F(x_0)$, med $F^{-1} \in C^1(F(\tilde{U}), \tilde{U})$:

$$D(F^{-1}) = (DF)^{-1} \circ F^{-1}$$




$F \approx F(x_0) + DF[x_0]h$



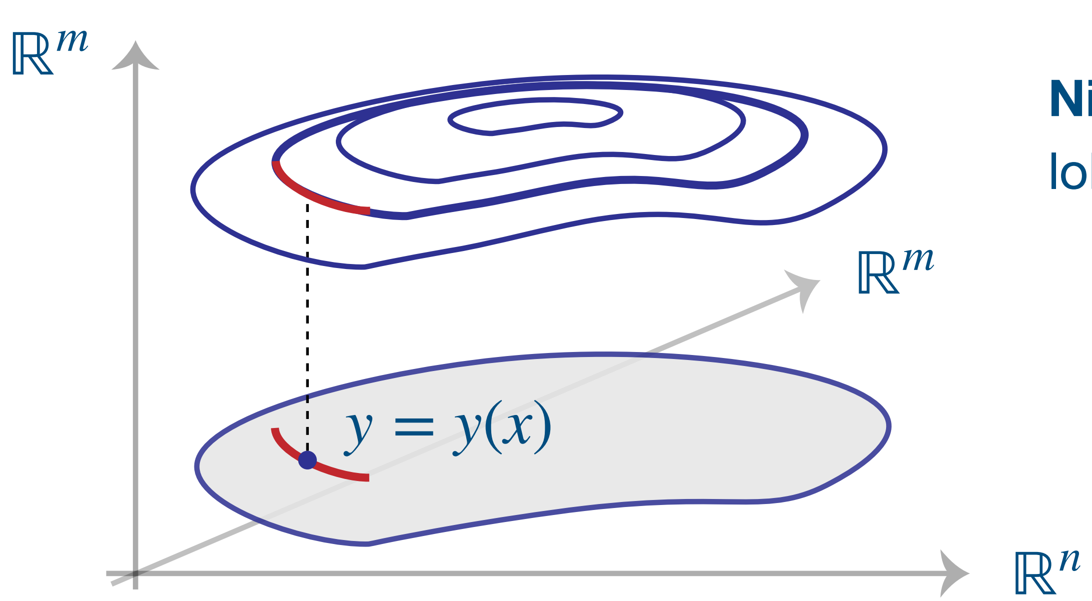
# Implisitte funksjonssetningen

$U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ åpen, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ med den partielle **Jacobimatrisen**

$DF_y[x_0, y_0]$ **omvendbar** $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow \quad \exists \tilde{U} = \tilde{B}_{x_0} \times \tilde{B}_{y_0} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ og $\Phi \in C^1(\tilde{B}_{x_0}, \tilde{B}_{y_0})$ sånn at $F(x, \Phi(x)) = 0$ **gir alle løsninger** til $F(x, y) = 0$ i $\tilde{U}$, og

$$D\Phi = -\,[D_yF(\Phi)]^{-1}D_xF(\Phi)\,.$$




**Nivåkurve** ($n$-dimensjonal flate, lokalt parameterisert ved $x \in \mathbb{R}^n$)

# 13.1–13.2 Lokale og globale ekstrema

$F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kontinuerlig har globalt maksimum på hver kompakt $K \subset U$.

Et eller flere punkter med egenskapen $F(x_0) = \max_{x \in K} F(x)$.

**Minst én av følgende muligheter gjelder:**

| | |
|---|---|
| (i) $x_0 \in \partial K$ | (globalt maksimum på **randen** av $K$) |
| (ii) $F$ ikke deriverbar i $x_0$ | (globalt maksimum i **singulært punkt**) |
| (iii) $\nabla F(x_0) = 0$ | (**nødvendig** vilkår for lokalt ekstremum i indre punkt) |

For $F \in C^2(U, \mathbb{R})$ med $\nabla F(x_0) = 0$ i indre punkt bestemmer egenverdiene til Hessematrisen $D^2F[x_0]$ et eventuelt lokalt ekstremum.

$D^2F[x_0]$ **positivt/negativt definit $\Rightarrow$ lokalt minimum/maksimum.**

$D^2F[x_0]$ **har strengt negative og strengt positive egenverdier $\Rightarrow$ saddelpunkt.**

$D^2F[x_0]$ semidefinit eller ellers indefinit $\Rightarrow$ ingen konklusjon.

**Andrederivertetesten i $\mathbb{R}^2$:** Tegnet til $\underline{F_{xx}F_{yy} - (F_{xy})^2}$ i $x_0$ avgjør lokalt ekstremum/saddelpunkt.

# 13.3 Minimering ved bivilkår

$F, G \in C^1(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ åpen.

Dersom $\{x \in U : G(x) = 0\}$ er kompakt har F et maks/min der.

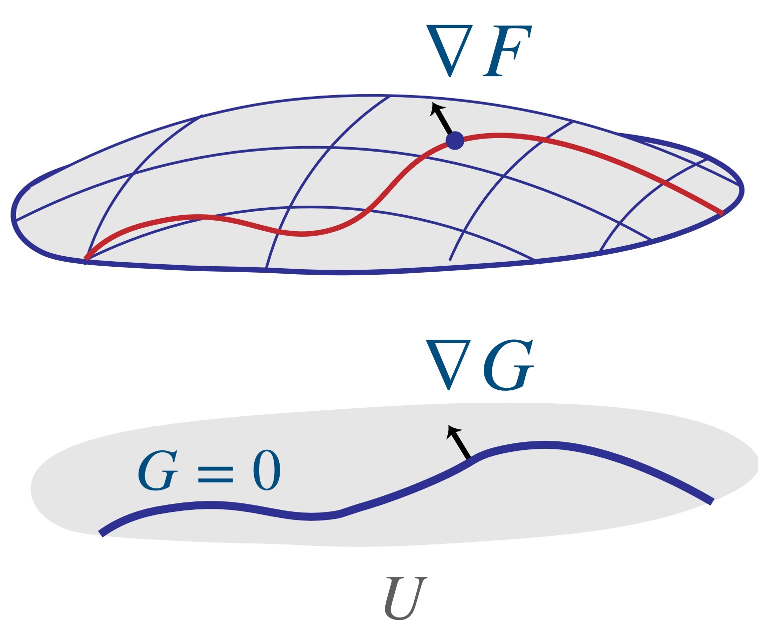
I et punkt der $F(x_0) = \max\limits_{G(x)=0} F(x)$ gjelder at $\nabla F(x_0) \parallel \nabla G(x_0)$, d v s:

(i) $\nabla G(x_0) = 0$ (kritiskt punkt for $G$)

eller

Lagrange-multiplikator

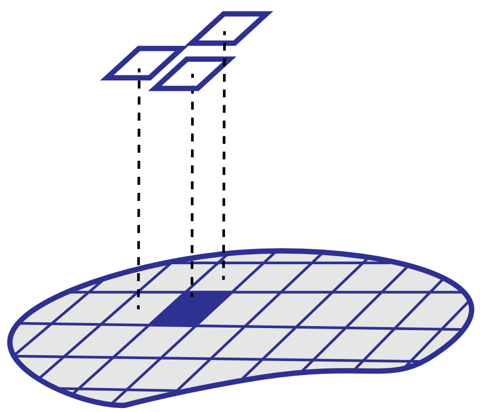
(ii) $\nabla G(x_0) \neq 0$ og $\exists \lambda \in \mathbb{R};$ $\nabla F(x_0) = \lambda \nabla G(x_0)$




Merk at $\nabla G(x_0) \neq 0$ garanterar at $\{G(x) = 0\}$ er en $(n-1)$-dimensjonal kurve, flate eller hyperflate i $\mathbb{R}^n$ kring $x_0$. Dette er implisitte funksjonssetningen.

# 14.1–14.3 Integrasjon i planet

Den enkleste måten å innføre integraler i begrensete $U \subset \mathbb{R}^2$ er via Riemannsummer:



$$\iint_U f \, \mathrm{d}A = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j, y_j)\, A(R_j)$$

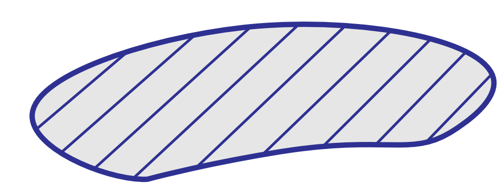
der det maksimale arealet $\max_j A(R_j) \to 0$ når $N \to \infty$,

og punktene $(x_j, y_j)$ kan velges vilkårlig innenfor hver $R_j$.

Hvis høyreleddet er veldefinert, kalles $f$ **integrerbar**. Kontinuerlige funksjoner er altid integrerbare på begrensete domener av typen nedenfor.

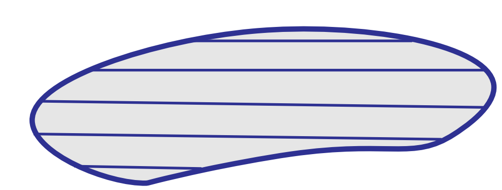
For å sikkerstille at integralet gir mening betrakter vi mengder som kan parameteriseres ved hjelp av kontinuerlige funksjoner:

$$U = \{(x, y) \colon a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\},$$



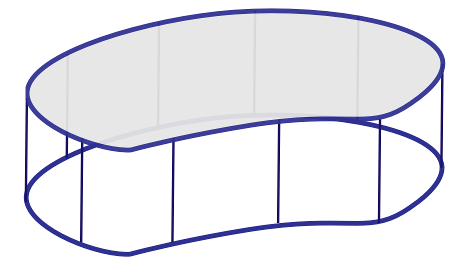
eller

$$U = \{(x, y) \colon a(y) \le x \le b(y), c \le y \le d\}.$$

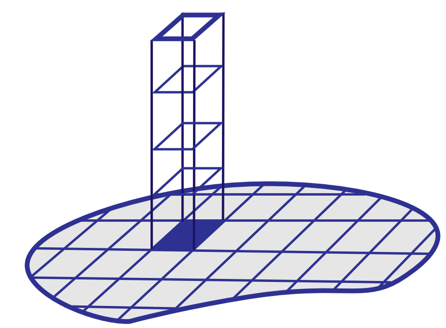


# Todimensional integrasjon som itererte integraler

Integralet $\iint_U \mathrm{d}A$ beskriver **arealet** $A(U)$, eller ekvivalent, volumet til legemet med enhetshøyde over samme areal.

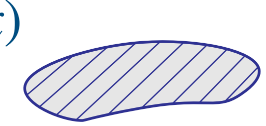


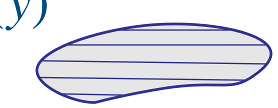
På same måte beskriver $\iint_U f\,\mathrm{d}A$ **volumet** mellom flaten $z = f(x,y)$ og $xy$-planet.

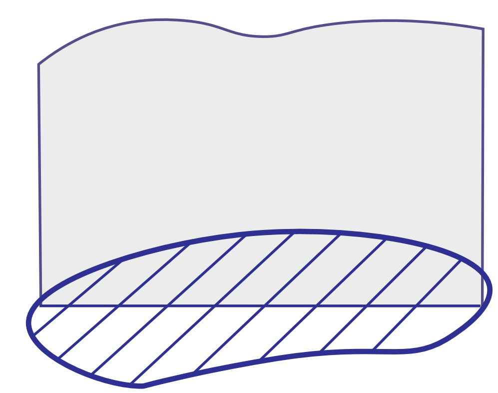


**Teorem (Fubini, Tonelli, Euler, …)**

$$\iint_U \mathrm{d}A = \int_a^b \left( \int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left( \int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$







dersom f er integrerbar, og $U$ er kontinuerlig parameteriserbar som ovenfor.

Merk: volum som et integral av arealer.

# Variabelsubstitusjon i dobbeltintegraler

Gitt at $\iint_U \mathrm{d}A$ eksisterer, la $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^2$ være kontinuerlig deriverbar med inverterbar Jakobimatrise $D\Phi$ på $U$. Da gjelder variabelbyttet

$$\iint_{\Phi(U)} f\,\mathrm{d}A = \iint_U (f \circ \Phi)\,|\,D\Phi\,|\,\mathrm{d}A.$$

Integralet gitt i kartesiske koordinater, ønsker skifte til polarkoordinater.

$\Phi\colon (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$

$D\Phi = \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ med determinant $r \neq 0$ utenfor origo.

$$\iint\limits_{\Phi(U)(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{U(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

# Trippelintegraler

Trippelintegralet $\iiint_U \mathrm{d}V$ beskriver **volumet** $V(U)$.

$\iiint_U f\,\mathrm{d}V$ er ofte et mål på en fysisk størrelse over $U$, som densitet, konsentrasjon, varme, etcetera. Integralet blir da et mål på totalen, f eks vekten til et legeme.

**Teorem (iterert integrasjon)**

La $f, g, h$ være kontinuerlige, $U = \{(x, y, z) \colon g(x, y) \leq z \leq h(x, y)$ der $(x, y) \in V\}$. Da er:

$$\iiint_U f\,\mathrm{d}V = \iint_V \left( \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, \cdot\,)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A.$$

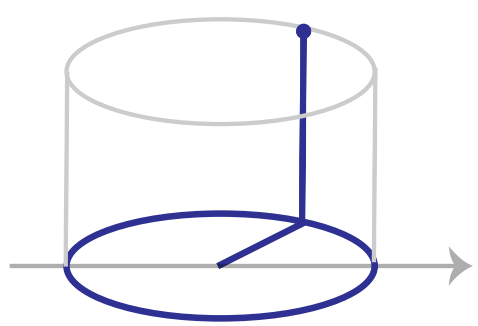
Trippelintegralet er redusert til et dobbeltintegral.

# Variabelbytte i trippelintegraler

Liksom i to dimensjoner, gjelder formelen for variabelbytte

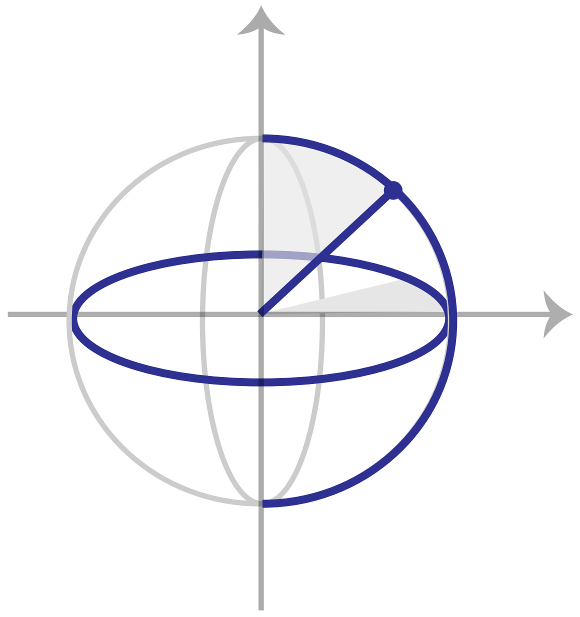
$$\iiint_{\Phi(U)} f \, \mathrm{d}V = \iiint_U (f \circ \Phi) \, |D\Phi| \, \mathrm{d}V.$$

Vanlig er sfæriske (kulekoordinater) og sylindriske koordinater:



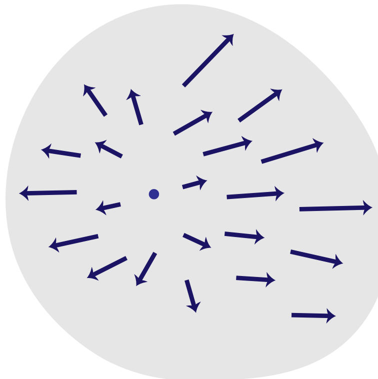
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = \rho\cos\theta\sin\phi. \\ y &= r\sin\theta = \rho\sin\theta\sin\phi. \\ z &= z \qquad\quad = \rho\cos\phi. \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$



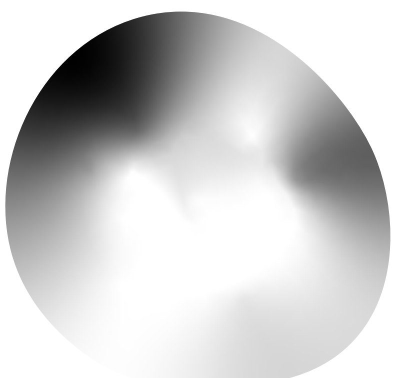
# 15.1–15.2 Vektor- og skalarfelt

Et **vektorfelt** er en funksjon som tildeler en vektor i $\mathbb{R}^n$ til hvert punkt i $\mathbb{R}^n$:



$$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Et **skalarfelt** er en funksjon som tildeler et verdi i $\mathbb{R}$ til hvert punkt i $\mathbb{R}^n$:



$$f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

**Eksempel**:

(i) Hastighetsfelt: For gitt tid, hastighetsvektoren til partikelen i posisjon $(x, y, z)$ i en væske eller i rommet.

(ii) Gradientfelt: gradienten til en funksjon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er et vektorfelt $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(iii) Intensitetsfelt: varme, densitet, styrke på et signal i hver punkt $(x, y, z)$ ved en måling.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

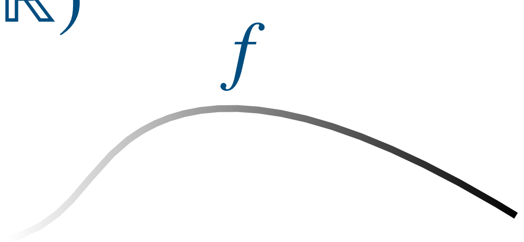
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto xy + z^2.$$

# Kurvintegraler av felt

Tidligere: lengden av en glatt kurve $\gamma \in C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ med $|\dot{\gamma}| \neq 0$ på $(a,b)$,

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

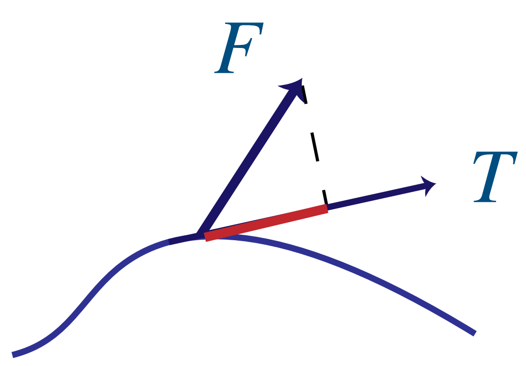
Anta $\gamma((a,b)) \subset U$. Da er **kurvintegralet av et skalarfelt** $f \in C(U,\mathbb{R})$




$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

**Eksempel**: integralet av densitet over en tråd = vekt; integralet av størrelse over en bane delt med lengden = gjennomsnittlig størrelse lengs banen.

**Kurvintegralet av et vektorfelt** $F \in C(U,\mathbb{R}^n)$ er integralet av projeksjonen av feltet langs enhetstangenten til kurven:

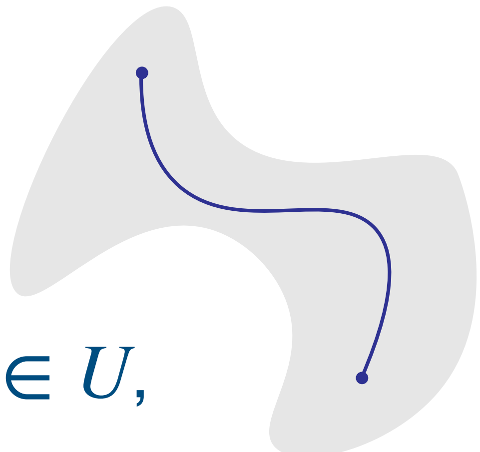



$$\int_\gamma F\cdot\mathrm{d}r = \int_\gamma F\cdot T\,\mathrm{d}s = \int_a^b F\cdot\dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t.$$

# Konservative vektorfelt

Et vektorfelt $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ er **konservativt** dersom det eksisterer $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$;

$$\nabla \phi = F.$$

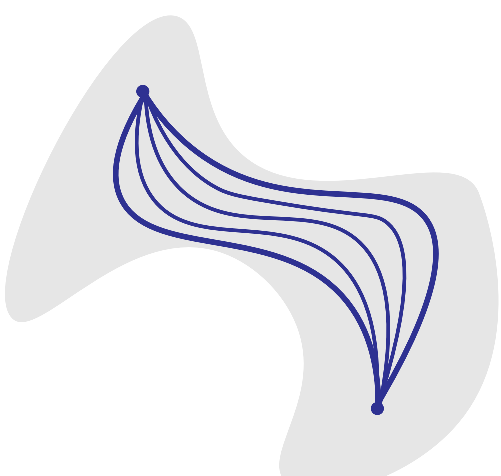


Funksjonen $\phi$ kalles da en **potensial** til vektorfeltet $F$.

En mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ er **sammenhengende** dersom for hvert par $x, y \in U$, eksisterer en kurve $\gamma \in C([0,1], U)$ med $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ .

Mengden er **enkelt sammenhengende** dersom alle slike kurver kan forbindes kontinuerlig: For hvert par av punkter $x, y \in U$, og hvert par av kurver $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1], U)$ med $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x, \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = y$, eksisterer en kontinuerlig familie $\gamma_\lambda \in C([0,1] \times [0,1], U), (t, \lambda) \to \gamma_\lambda(t)$ slik at

$$\gamma_\lambda|_{\lambda=0} = \gamma_0, \qquad \gamma_\lambda|_{\lambda=1} = \gamma_1.$$



Enkelt sammenhengende mengder 'savner gjennomgående hull'.

# Karakterisering av konservative vektorfelt

**Teorem.** $U \subset \mathbb{R}^n$ åpent og enkelt sammenhengende, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$,
$\gamma \in C^1((a,b), U)$ med $|\dot{\gamma}| \neq 0$. Da er følgende vilkår ekvivalente:

(i) $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ er konservativt ( $\phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ med $\nabla \phi = F$ )

(ii) $\partial_{x_j} F_i = \partial_{x_i} F_j$ for alle $1 \leq i, j \leq n$ .

(iii) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr = 0$ for hver <u>lukket</u> kurve $\gamma$ i $U$ .

(iv) $\displaystyle\int_a^b F \cdot dr = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$ for noen funksjon $\phi$ og hver kurve $\gamma$ i $U$.

Merk. (i), (iii) og (iv) fremdeles ekvivalente også i en (kun) sammenhengende mengde.

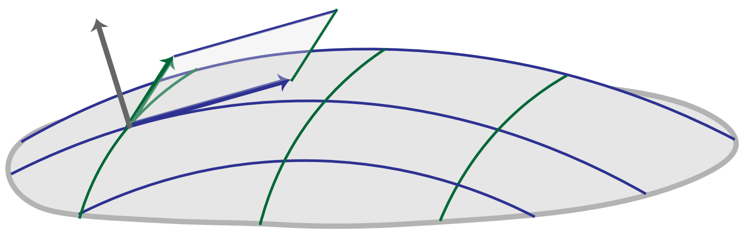
# 15.5 Flater og flateintegraler

En **flate** $S \subset \mathbb{R}^2$ er **glatt**, dersom $S$ har en parametrisering $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(s, t) \mapsto r(s, t) = (r_1(s, t), r_2(s, t), r_3(s, t)),$$

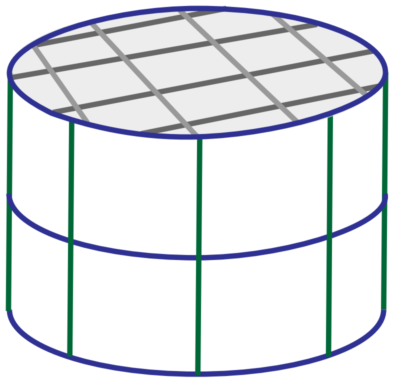
sånn at familiene av kurver $s \mapsto r(s, t)$ og $t \mapsto r(s, t)$ er glatte for alle $(s, t) \in U$, og

$$\left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right| \neq 0.$$



Vektoren $\partial_s r \times \partial_t r$ er en kontinuerlig **normal** til flaten, parameterisert ved $(s, t)$.

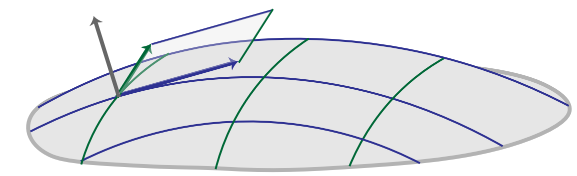
Dersom $U$ har en rand, vil $S$ ha en rand, og vi fordrer da bare kontinuitet på randen. Flere glatte flater til **stykkevis glatte flater**, så fremt S blir kontinuerlig over sammensetning.



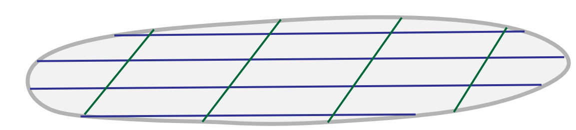
# Grafer og nivåmengder

**Grafen** til en funksjon $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, er en glatt flate parametrisert ved

$$r: (x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)),$$



Med tangentvektorer $\partial_x r = (1, 0, \partial_x f)$, $\partial_y r = (0, 1, \partial_y f)$, og normalvektor

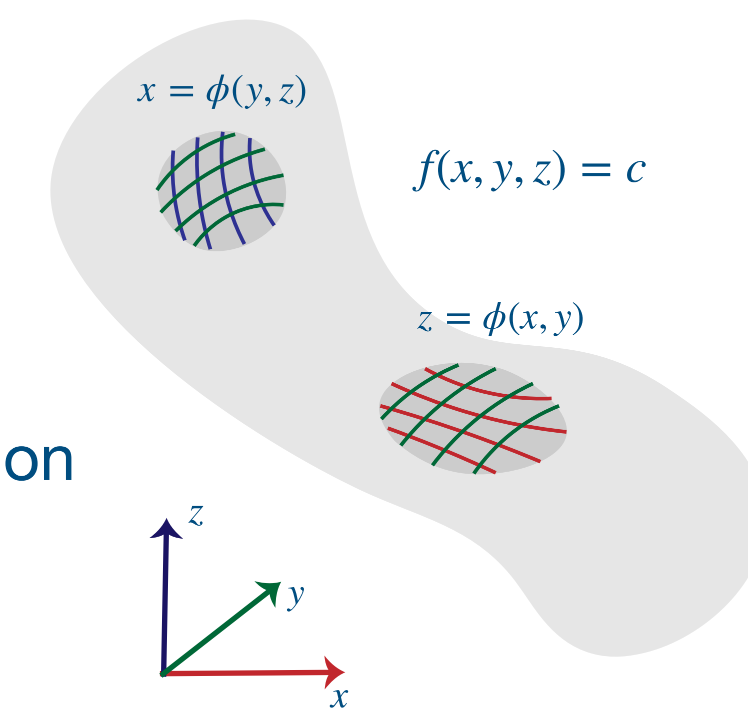


$$\partial_x r \times \partial_y r = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)\,.$$

**Nivåmengden** $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$ til en funksjon $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ av tre variabler, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, er en glatt flate dersom

$$|\nabla f(x, y, z)| \neq 0$$

for alle $(x, y, z) \in V$, og $\nabla f$ er en normal til flaten.



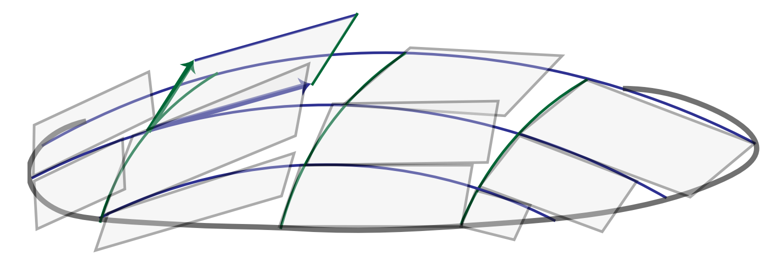

**F.eks:** $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, \delta > 0$ og en unik $C^1$-funksjon $\phi$ sånn at $f(x, y, \phi(x, y)) = c$ for $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$.

<u>Lokalt er nivåmengden grafen til $(x, y, \phi(x, y))$.</u>

# Flateintegraler: skalarfelt

**Integrasjon over flater** innføres via Riemannsummer der arealet til et flatestykke $S(s_j, t_k)$ blir approksimert med tilsvarende parallellogram bestemt av tangentvektorene på flaten og skrittlengdene $\Delta s$, $\Delta t$ i parametrene.

$$A(S) = \sum_{j,k} A(S(s_j, t_k)) \approx \sum_{j,k} |\partial_s r \times \partial_t r| \, \Delta s \, \Delta t,$$



Etter grenseovergang når $\Delta t, \Delta s \to 0$ fører dette til:

$$\boxed{A(S) = \iint_U |\partial_s r \times \partial_t r| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t = \iint_S \mathrm{d}\sigma,}$$

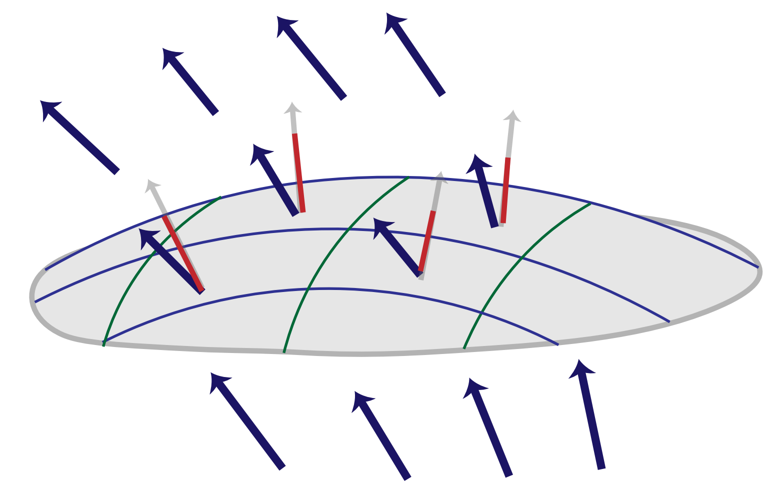
der $r$ er en glatt parametrisering over $U$. Dersom $f \in C(V, \mathbb{R})$ og $S \subset V$, innfører vi på same måte som tidligere **flateintegralet**

$$\boxed{\iint_S f \, \mathrm{d}\sigma = \iint_U f(r(s,t)) \, |\partial_s r \times \partial_t r| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t.}$$

# Fluks

**Fluksintegraler** er et mål på den totale flyten (transporten) av et vektorfelt gjennom en flate $S$ i normalretning til flaten. Dette er ingenting annet enn flateintegralet av $F \cdot N$, der $N$ er **enhetsnormalen** til flaten orientert i en gitt retning.

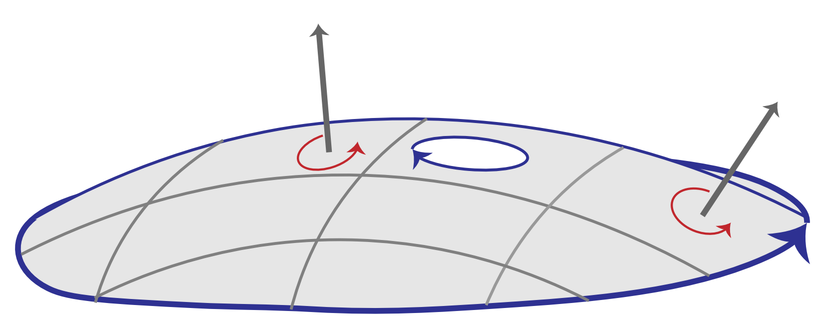
$$\boxed{\iint_S F \cdot N \,\mathrm{d}\sigma = \pm \iint_U F(r(s,t)) \cdot (\partial_s r \times \partial_t r)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t,}$$



Merk at $N = \dfrac{\partial_s r \times \partial_t r}{|\,\partial_s r \times \partial_t r\,|}$ og $\mathrm{d}\sigma = |\,\partial_s r \times \partial_t r\,|\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t$, så lengden kansellerer.

En flate er **orienterbar** dersom den har en kontinuerligt parametriserbar normal.

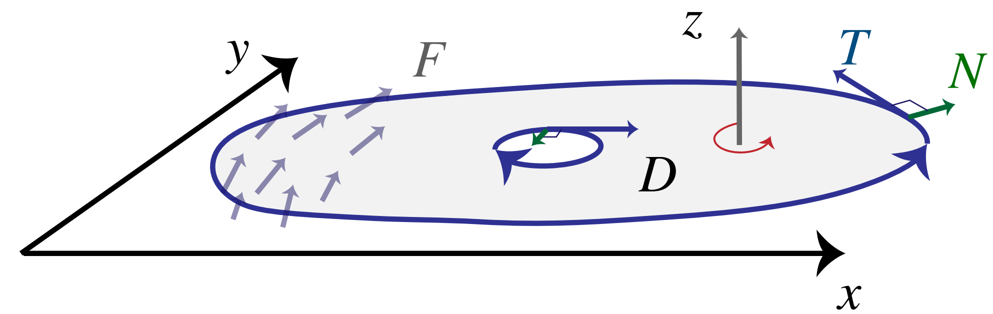
Normalen gir da en 'utside' og en 'innside' til $S$, og orienterer randen $\partial S$ enligt regeln til høyre.



# 16.1–16.3 Divergens, curl og Greens teorem

La $D \subset \mathbb{R}^2$ være en sammenhengende mengde med rand $\partial D$ parametrisert ved en glatt kurve $\gamma$, orientert per konvensjon, og la $F\colon D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være et kontinuerlig vektorfelt.

**Sirkulasjonen** til F langs $\partial D$ er: $$\int_{\partial D} F \cdot T \, \mathrm{d}s.$$




**Fluksen** av F ut av $D$ er: $$\int_{\partial D} F \cdot N \, \mathrm{d}s.$$

Disse henger sammen med:

**Divergensen**: $$\mathrm{div}(F) = \nabla \cdot F = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} F_j, \qquad F \in C^1(U, \mathbb{R}^n).$$

**Rotasjonen:**

$$\mathrm{curl}(F) = \nabla \times F = \left( \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}, \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}, \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right), \qquad F \in C^1(U, \mathbb{R}^3).$$

$F \in C^1(U, \mathbb{R}^2)$

# Greens setning

La $(P, Q) : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være et $C^1$-vektorfelt definert i et omegn av en sammenhengende mengde $D$, med glatt rand $\partial D$. Da er:

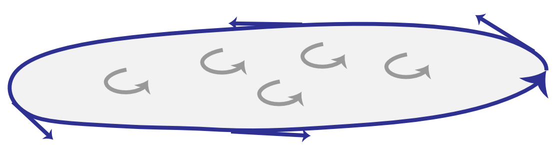
$$\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

$P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = (P, Q) \cdot \dot{\gamma}\,\mathrm{d}t$

$$F = (P, Q) \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\partial D} F \cdot T\,\mathrm{d}s = \iint_D \operatorname{curl}(F)\,\mathrm{d}A\,.$$

(Kelvin–Stokes i 2D)

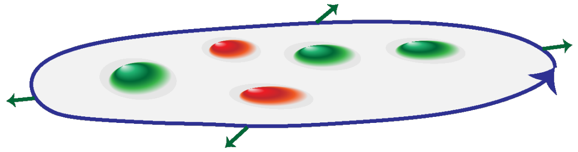
Kobler **sirkulasjonen** av F langs $\partial D$ til **rotasjonen** i det indre av $D$.



$$F = (Q, -P) \qquad \Rightarrow \qquad \int_{\partial D} F \cdot N\,\mathrm{d}s = \iint_D \operatorname{div}(F)\,\mathrm{d}A\,.$$

(Gauß–Ostrovsky i 2D)

Kobler **fluksen** av F ut av $\partial D$ til **divergensen** i det indre av $D$.



Sources (kilder) and sinks = divergensen positiv/negativ

# 16.4 Divergenssetningen (Gauß)

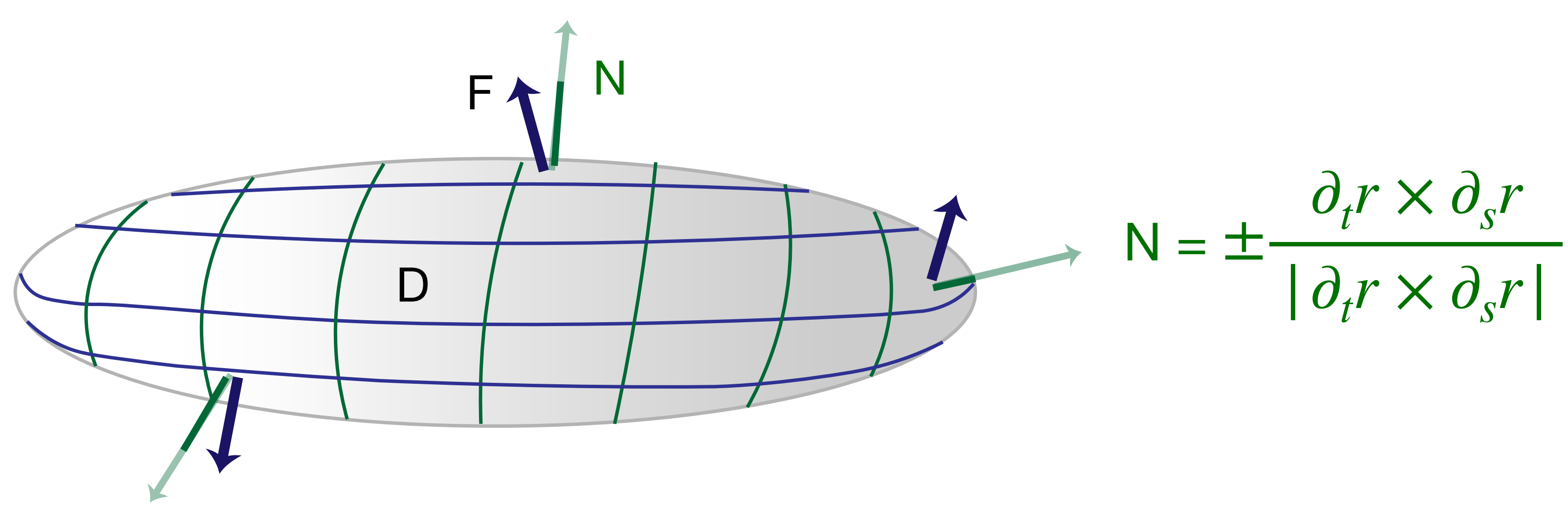
$D \subset \mathbb{R}^3$ kompakt legeme med glatt og orienterbar rand $\partial D$ (en flate).

$F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ vektorfelt definert på en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^3$ som inneholder $D$.

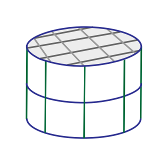
Da er fluksen ut av $D$ gitt ved integralet over divergensen i $D$,

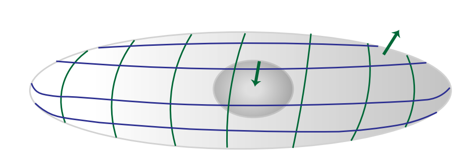
$$\iint_{\partial D} F \cdot N \, \mathrm{d}\sigma = \iiint_D \mathrm{div}(F) \, \mathrm{d}V,$$

der $N$ er enhetsnormalen som peker ut av legemet $D$.




Gauß kan også brukes på legemer med stykkevis og ikke sammenhengende glatt rand.





# 16.5 Stokes′ setning

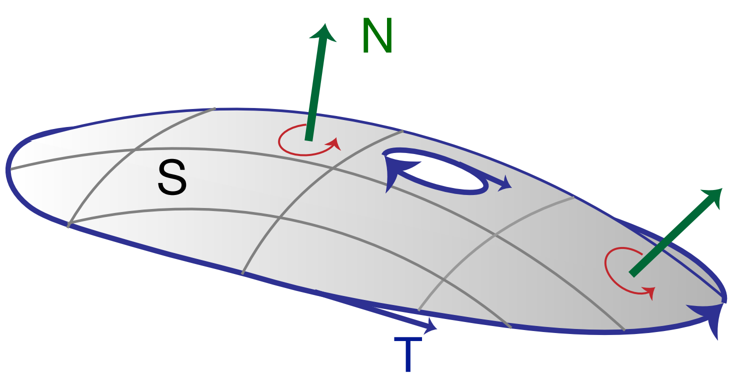
$S \subset \mathbb{R}^3$ kompakt flate med glatt og orientert rand $\partial S$ (en kurve).

$F \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ vektorfelt definert på en åpen mengde $U \subset \mathbb{R}^3$ som inneholder $S$.

Da er sirkulasjon langs $\partial S$ gitt ved integralet over rotasjonen på $S$,

$$\int_{\partial S} F \cdot T \, \mathrm{d}s = \iint_S \mathrm{curl}(F) \cdot N \, \mathrm{d}\sigma,$$

der retningen til tangenten $T$ er orientert etter retningen til $N$.




$$N = \pm \frac{\partial_t r \times \partial_s r}{|\partial_t r \times \partial_s r|}$$

Stokes kan osgå brukes på flater med stykkevis og ikke sammenhengende glatt rand.

– Stokes setning *er* Greens setning dersom flaten S ligger i et plan.

– Så lenge randen $\partial S$ er fiksert, kan vi omforme $S$ som vi ønsker for å beregne sirkulasjonen!