Funksjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Generelle eksempler:

- En flyrute over tid: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
- Høyden over havet på et topografisk kart: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
- Parameteriseringen av et plan eller en sfære i tre dimensioner: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- Variabelbytten: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- Matriser/lineære avbildninger (f.eks. totalkostnad av produkter i forskjellige kategorier): $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$
- Artifisielle neurale nettverk (f.eks. kobling fra musikkvideor til preferansegrupper): $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Eksempel. $F\colon [0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $(r,\theta) \mapsto F(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

Beskriver polarkoordinater i kartesiske: $(x,y) = (F_1(r,\theta)), F_2(r,\theta))$.

$(r,\theta) \mapsto F_1(r,\theta)$ kontinuerlig deriverbar med gradient $\nabla F_1(r,\theta) = (\cos\theta, -r\sin\theta)$.

$(r,\theta) \mapsto F_2(r,\theta)$ kontinuerlig deriverbar med gradient $\nabla F_2(r,\theta) = (\sin\theta, r\cos\theta)$.

$DF(r,\theta) = \begin{bmatrix} \nabla F_1(r,\theta) \\ \nabla F_2(r,\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$ er den **deriverte** til F, også nevnt **Jacobimatrisen**.

For generelle funksjoner $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ blir den deriverte

$$DF = \begin{bmatrix} \nabla F_1 \\ \vdots \\ \nabla F_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad \text{en } m \times n\text{-Jacobimatrise.}$$

Den generelle kjerneregelen. $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \qquad G\colon \mathbb{R}^r \to \mathbb{R}^n.$

For én komponent F_j av F, og $\gamma(t_i) = G(\ldots, t_i, \ldots)$ avhengig av kun én variabel, har vi den tidligere kjerneregelen

$$\frac{d}{dt_i} F_j \circ \gamma = \nabla F_j(\gamma) \cdot \frac{d\gamma}{dt_i} = \begin{bmatrix} \ \nabla F_j(\gamma) \ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{d\gamma}{dt_i} \end{bmatrix}.$$

Så for $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}$ blir

$$\frac{d}{dt_i} F \circ \gamma = \begin{bmatrix} \nabla F_1(\gamma) \\ \vdots \\ \nabla F_m(\gamma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{d\gamma}{dt_i} \end{bmatrix} = [DF] \begin{bmatrix} \dfrac{\partial G}{\partial t_i} \end{bmatrix} \qquad [m \times n][n \times 1]$$

Og for $G = G(t_1, \ldots, t_r)$ blir

$$\underset{[m \times r]}{D(F \circ G)} = \begin{bmatrix} (\nabla F_1) \circ G \\ \vdots \\ (\nabla F_m) \circ G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla G_1 \\ \vdots \\ \nabla G_n \end{bmatrix} = \underset{[m \times n][n \times r]}{\big[(DF) \circ G\big]\,[DG]}.$$

12.8 Implisitt derivasjon

Implisitt derivasjon er derivasjon av en likhet *som om* en variabel varierte med en annen.

Eksempel: $y - x^2 = 0.$

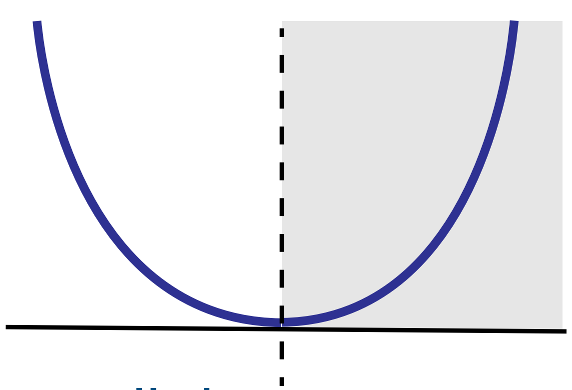
Med hensikt på x: $\dfrac{d}{dx}(y(x) - x^2) = \dfrac{d}{dx}0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(x) = 2x\,.$

Med hensikt på y: $\dfrac{d}{dy}(y - x(y)^2) = \dfrac{d}{dy}0 \quad \Rightarrow \quad 1 - 2x(y)x'(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x'(y) = \dfrac{1}{2x(y)}.$

Dersom $x \neq 0.$

$x \mapsto y = x^2$ er en funksjon for alle $x \in \mathbb{R}$.

$y \mapsto x = \pm\sqrt{y}$ er to *forskjellige* funksjoner, som skilles i $x = 0.$

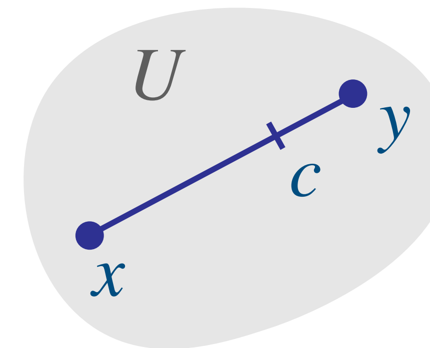


Vi skal se: dersom en implisitt deriverte kan beregnes, finnes den er og er riktig.

$$\boxed{y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} \quad \text{for et punkt } (x_0, y_0) \text{ på kurven } F(x,y) = c \text{ når } F'_y(x_0, y_0) \neq 0.}$$

12.9 Taylors formel, Taylorrekker

Middelverdisetning for $F \in C^1(U, \mathbb{R}), \quad U \subset \mathbb{R}^n$.



$$\boxed{F(y) - F(x) = \nabla F(c) \cdot (y - x)}$$

Skriv $x = x_0$ og $y = x_0 + h \quad \Rightarrow \quad$ 'minste Taylor': $\quad F(x_0 + h) = F(x_0) + \nabla F(c) \cdot h$

Taylor's formel for $F \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$**:**

$$F(x_0 + h_1, y_0 + h_2) = F(x_0, y_0) + \underbrace{h_1 F'_x(x_0, y_0) + h_2 F'_y(x_0, y_0)}_{h \cdot \nabla F} + \frac{1}{2} \underbrace{h_1^2 F''_{xx}(c_1, c_2) + 2h_1 h_2 F''_{xy}(c_1, c_2) + h_2^2 F''_{yy}(c_1, c_2)}$$

$$D^2 F(h, h) = \begin{bmatrix} h_1 & \dots & h_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \partial_{x_1}\partial_{x_1} F & \dots & \partial_{x_1}\partial_{x_2} F \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_{x_2}\partial_{x_1} F & \dots & \partial_{x_n}\partial_{x_n} F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

'Hessian'

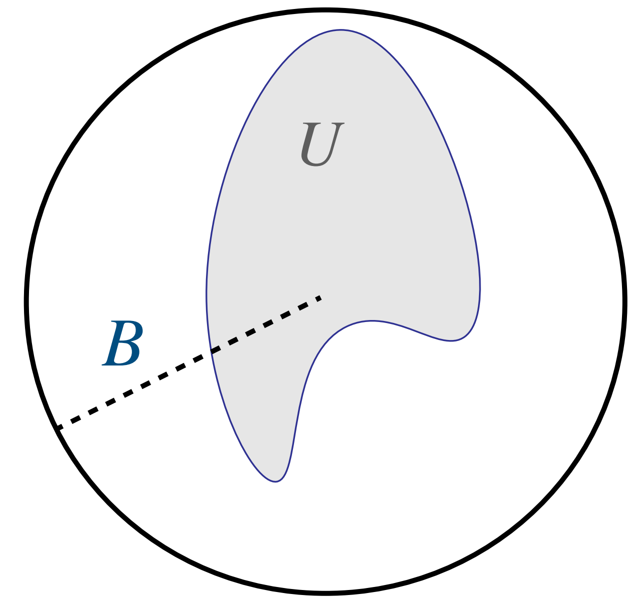
Taylorpolynomer er unike: har vi funnet ett, har vi funnet det riktige.

Generelt for $F \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$**:**

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + DF(x_0)(h) + \frac{1}{2} D^2 F[x_0](h, h) + \cdots + \frac{1}{k!} D^k F[x_0](h, \dots, h) + \overbrace{O(|h|^{k+1})}^{\leq C|h|^{k+1}}$$

Grunnleggende setninger for funksjoner

$U \subset \mathbb{R}^n$ begrenset dersom $|x| \leq B$ for alle $x \in U$.

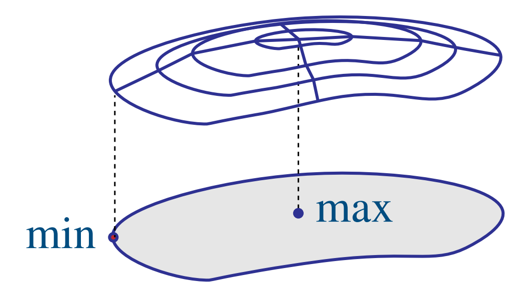


Bolzano–Weierstrass: hver følge $\{x_j\}_j$ i en begrenset mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ har en delfølge som konverger: $x_{j_k} \to x_0 \in \overline{U}$.

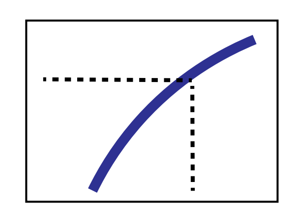
Heine–Borel: $U \subset \mathbb{R}^n$ begrenset og lukket $\quad \Leftrightarrow \quad U$ kompakt
(hver følge i U har en delfølge som konvergerer, til et element i U).

Ekstremalverdisetningen: $F \in C(U, \mathbb{R})$ med U kompakt $\Rightarrow$ eksisterer $x_0 \in U$;

$$F(x_0) = \max_{x \in U} F(x)$$



Omvendte funksjonssetningen (kort): $\quad F'(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists F^{-1}$ nært $y_0 = F(x_0)$.



Implisitte funksjonssetningen (kort):

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists y = y(x);\ F(x, y(x)) = 0 \text{ nært } (x_0, y_0)\,.$$

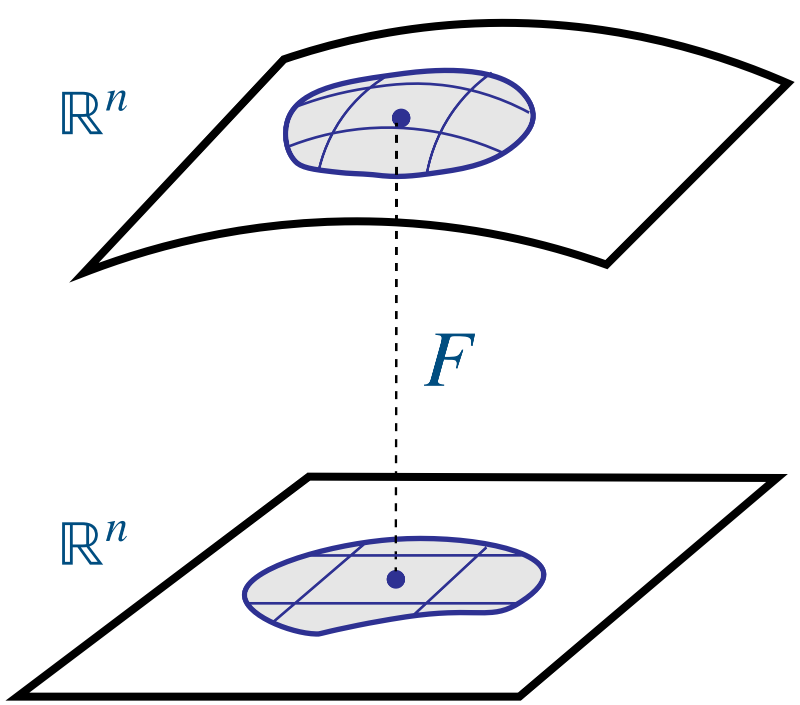
Omvendte funksjonssetningen

$U \subset \mathbb{R}^n$ åpen, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$ med **Jacobimatrisen** $DF[x_0]$ **omvendbar** $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

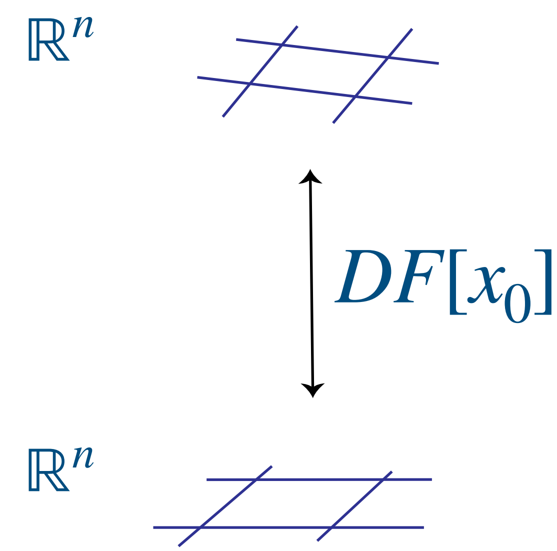
$\Rightarrow$ $\exists \tilde{U} \ni x_0$ sånn at $F\colon \tilde{U} \to F(\tilde{U})$ er omvendbar.

Videre: $F(\tilde{U})$ er en åpen mengde kring $y_0 = F(x_0)$, med $F^{-1} \in C^1(F(\tilde{U}), \tilde{U})$:

$$D(F^{-1}) = (DF)^{-1} \circ F^{-1}$$



$F \approx F(x_0) + DF[x_0]h$



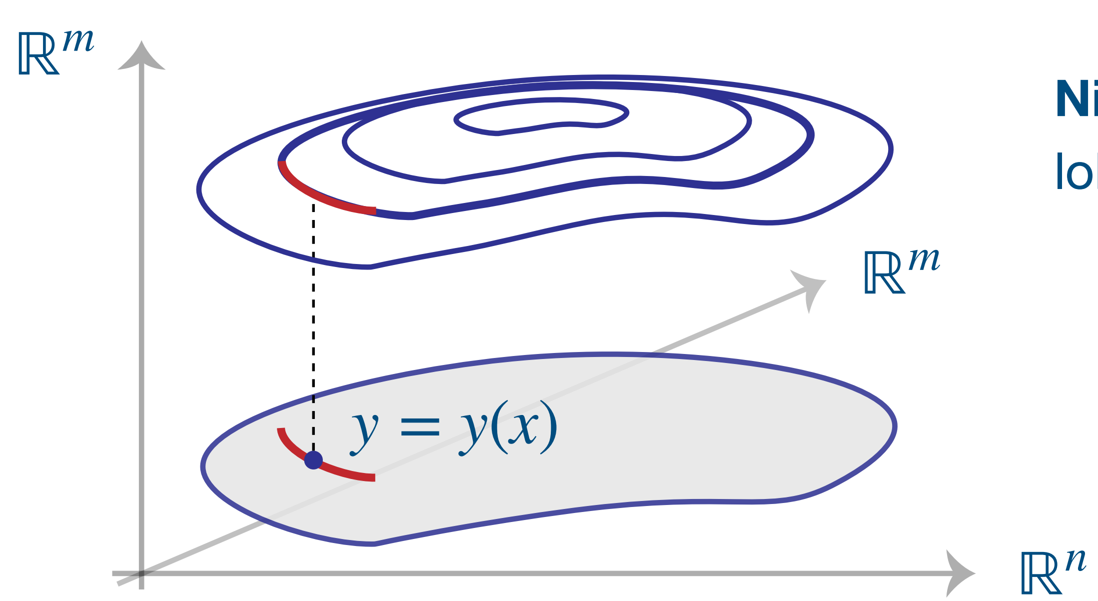
Implisitte funksjonssetningen

$U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ åpen, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ $F \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$ med den partielle **Jacobimatrisen**

$DF_y[x_0, y_0]$ **omvendbar** $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

$\Rightarrow$ $\exists \tilde{U} = \tilde{B}_{x_0} \times \tilde{B}_{y_0} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ og $\Phi \in C^1(\tilde{B}_{x_0}, \tilde{B}_{y_0})$ sånn at $F(x, \Phi(x)) = 0$ **gir alle løsninger** til $F(x, y) = 0$ i $\tilde{U}$, og

$$D\Phi = -\,[D_y F(\Phi)]^{-1} D_x F(\Phi)\,.$$



Nivåkurve (n-dimensjonal flate, lokalt parameterisert ved $x \in \mathbb{R}^n$)