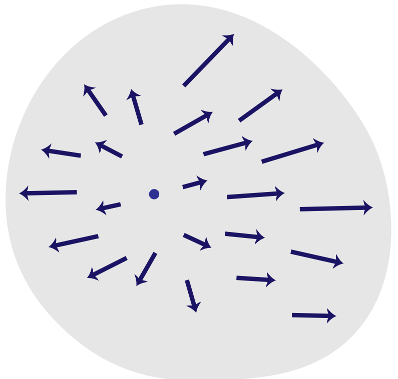
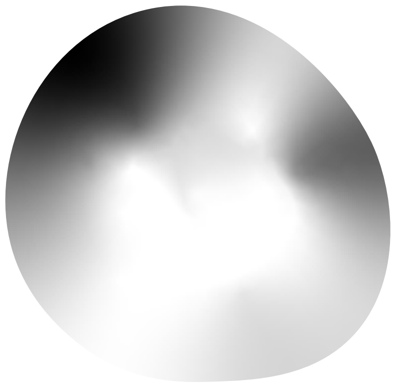
15.1–15.2 Vektor- og skalarfelt

Et **vektorfelt** er en funksjon som tildeler en vektor i $\mathbb{R}^n$ til hvert punkt i $\mathbb{R}^n$:



$$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Et **skalarfelt** er en funksjon som tildeler et verdi i $\mathbb{R}$ til hvert punkt i $\mathbb{R}^n$:



$$f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Eksempel:

(i) Hastighetsfelt: For gitt tid, hastighetsvektoren til partikelen i posisjon (x, y, z) i en væske eller i rommet.

(ii) Gradientfelt: gradienten til en funksjon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er et vektorfelt $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(iii) Intensitetsfelt: varme, densitet, styrke på et signal i hver punkt (x, y, z) ved en måling.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

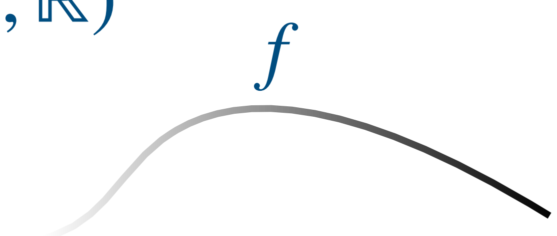
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto xy + z^2.$$

Kurvintegraler av felt

Tidligere: lengden av en glatt kurve $\gamma \in C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ med $|\dot\gamma| \neq 0$ på (a,b),

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

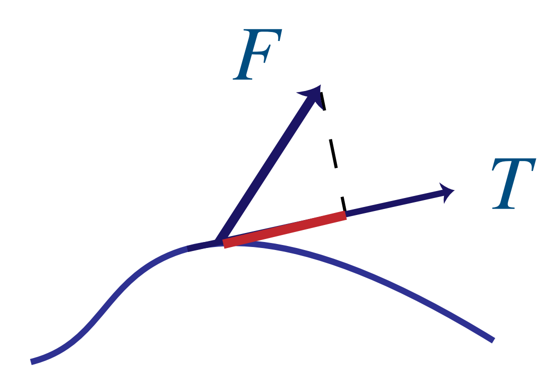
Anta $\gamma((a,b)) \subset U$. Da er **kurvintegralet av et skalarfelt** $f \in C(U,\mathbb{R})$



$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Eksempel: integralet av densitet over en tråd = vekt; integralet av størrelse over en bane delt med lengden = gjennomsnittlig størrelse lengs banen.

Kurvintegralet av et vektorfelt $F \in C(U,\mathbb{R}^n)$ er integralet av projeksjonen av feltet langs enhetstangenten til kurven:

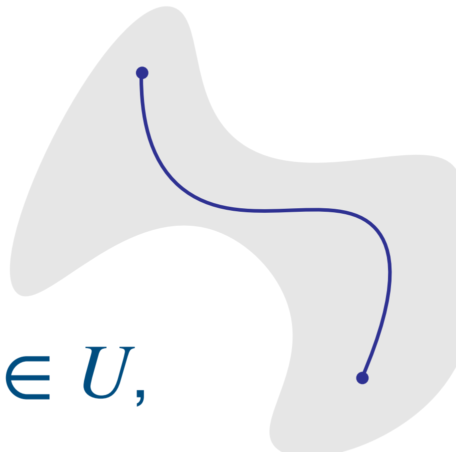


$$\int_\gamma F\cdot\mathrm{d}r = \int_\gamma F\cdot T\,\mathrm{d}s = \int_a^b F\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Konservative vektorfelt

Et vektorfelt $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ er **konservativt** dersom det eksisterer $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$;

$$\nabla \phi = F.$$

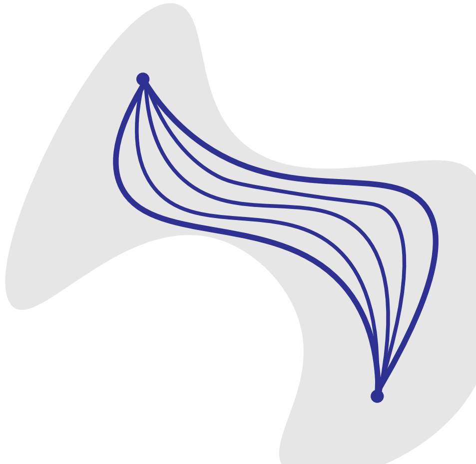


Funksjonen ϕ kalles da en **potensial** til vektorfeltet F.

En mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ er **sammenhengende** dersom for hvert par $x, y \in U$, eksisterer en kurve $\gamma \in C([0,1], U)$ med $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Mengden er **enkelt sammenhengende** dersom alle slike kurver kan forbindes kontinuerlig: For hvert par av punkter $x, y \in U$, og hvert par av kurver $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1], U)$ med $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x, \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = y$, eksisterer en kontinuerlig familie $\gamma_\lambda \in C([0,1] \times [0,1], U), (t, \lambda) \to \gamma_\lambda(t)$ slik at

$$\gamma_\lambda|_{\lambda=0} = \gamma_0, \qquad \gamma_\lambda|_{\lambda=1} = \gamma_1.$$



Enkelt sammenhengende mengder 'savner gjennomgående hull'.

Karakterisering av konservative vektorfelt

Teorem. $U \subset \mathbb{R}^n$ åpent og enkelt sammenhengende, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $\gamma \in C^1((a,b), U)$ med $|\dot{\gamma}| \neq 0$. Da er følgende vilkår ekvivalente:

(i) $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ er konservativt ($\phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ med $\nabla \phi = F$)

(ii) $\partial_{x_j} F_i = \partial_{x_i} F_j$ for alle $1 \leq i, j \leq n$.

(iii) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr = 0$ for hver lukket kurve γ i U .

(iv) $\displaystyle\int_a^b F \cdot dr = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$ for noen funksjon ϕ og hver kurve γ i U.

Merk. (i), (iii) og (iv) fremdeles ekvivalente også i en (kun) sammenhengende mengde.

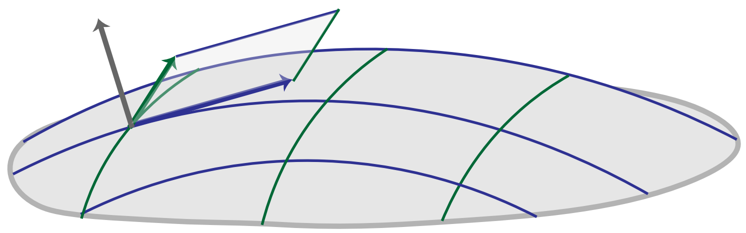
15.5 Flater og flateintegraler

En **flate** $S \subset \mathbb{R}^2$ er **glatt**, dersom S har en parametrisering $U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$(s,t) \mapsto r(s,t) = (r_1(s,t), r_2(s,t), r_3(s,t)),$$

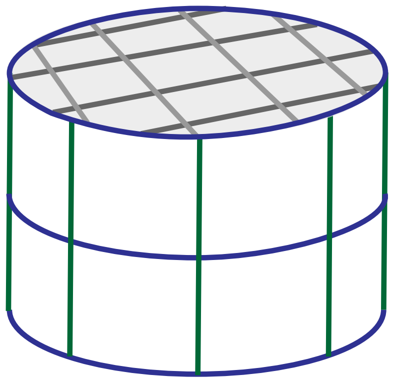
sånn at familiene av kurver $s \mapsto r(s,t)$ og $t \mapsto r(s,t)$ er glatte for alle $(s,t) \in U$, og

$$\left| \frac{\partial r}{\partial s} \times \frac{\partial r}{\partial t} \right| \neq 0.$$



Vektoren $\partial_s r \times \partial_t r$ er en kontinuerlig **normal** til flaten, parameterisert ved (s,t).

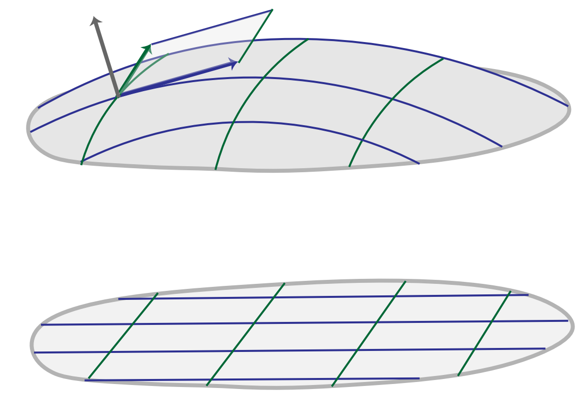
Dersom U har en rand, vil S ha en rand, og vi fordrer da bare kontinuitet på randen. Flere glatte flater til **stykkevis glatte flater**, så fremt S blir kontinuerlig over sammensetning.



Grafer og nivåmengder

Grafen til en funksjon $f \in C^1(U, \mathbb{R})$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, er en glatt flate parametrisert ved

$$r:\,(x, y) \mapsto (x, y, f(x, y)),$$



Med tangentvektorer $\partial_x r = (1,0,\partial_x f)$, $\partial_y r = (0,1,\partial_y f)$, og normalvektor

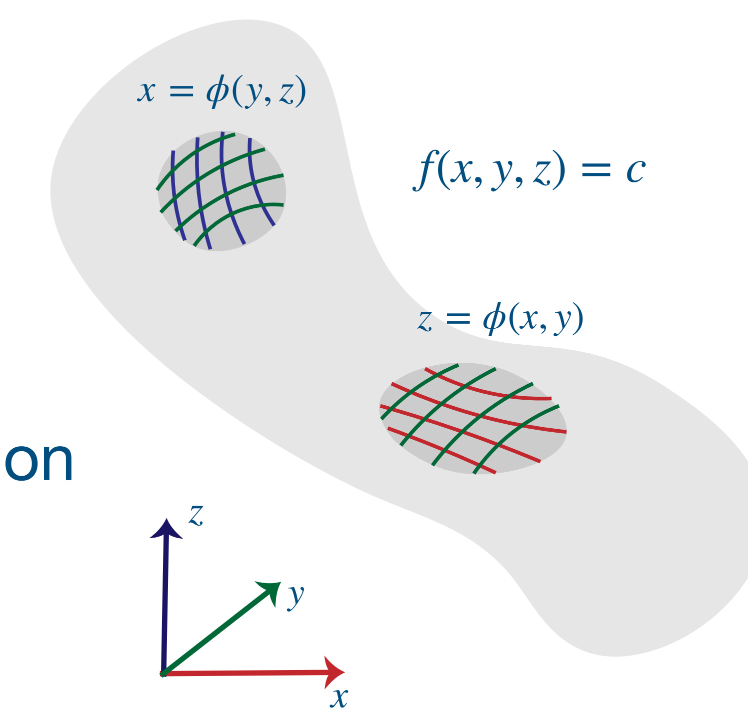
$$\partial_x r \times \partial_y r = (-\partial_x f, -\partial_y f, 1)\,.$$

Nivåmengden $\{(x, y, z) : f(x, y, z) = c\}$ til en funksjon $f \in C^1(V, \mathbb{R})$ av tre variabler, $(x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$, er en glatt flate dersom

$$|\nabla f(x, y, z)| \neq 0$$

for alle $(x, y, z) \in V$, og ∇f er en normal til flaten.

F.eks: $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0 \;\Rightarrow\; \exists\, \delta > 0$ og en unik C^1-funksjon ϕ sånn at $f(x, y, \phi(x, y)) = c$ for $(x, y) \in B_\delta(x_0, y_0)$.

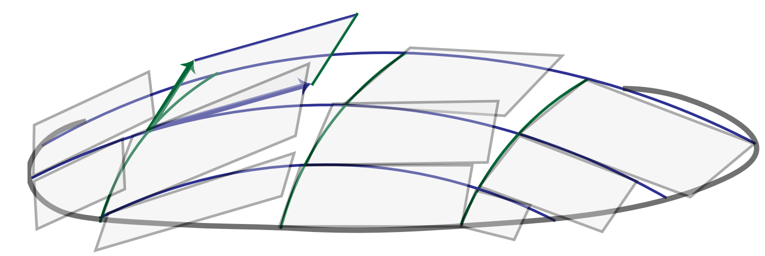


<u>Lokalt er nivåmengden grafen til $(x, y, \phi(x, y))$.</u>

Flateintegraler: skalarfelt

Integrasjon over flater innføres via Riemannsummer der arealet til et flatestykke $S(s_j, t_k)$ blir approksimert med tilsvarende parallellogram bestemt av tangentvektorene på flaten og skrittlengdene Δs, Δt i parametrene.

$$A(S) = \sum_{j,k} A(S(s_j, t_k)) \approx \sum_{j,k} |\partial_s r \times \partial_t r| \,\Delta s\, \Delta t,$$



Etter grenseovergang når $\Delta t, \Delta s \to 0$ fører dette til:

$$\boxed{A(S) = \iint_U |\partial_s r \times \partial_t r| \,\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t = \iint_S \mathrm{d}\sigma,}$$

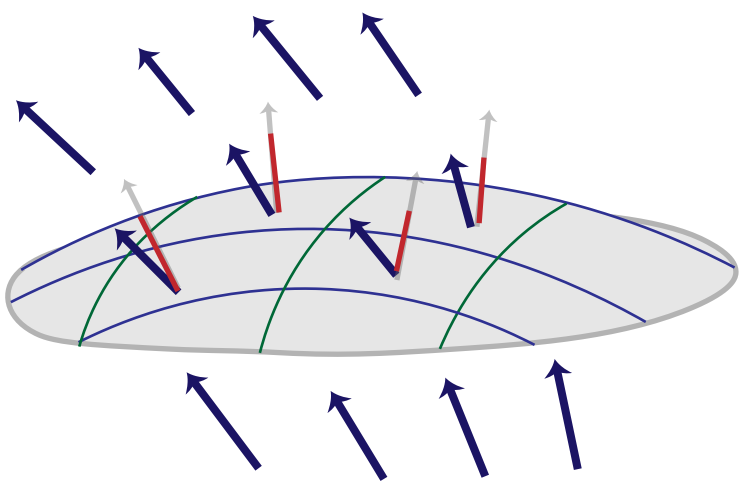
der r er en glatt parametrisering over U. Dersom $f \in C(V, \mathbb{R})$ og $S \subset V$, innfører vi på same måte som tidligere **flateintegralet**

$$\boxed{\iint_S f\,\mathrm{d}\sigma = \iint_U f(r(s,t))\,|\partial_s r \times \partial_t r| \,\mathrm{d}s\, \mathrm{d}t.}$$

Fluks

Fluksintegraler er et mål på den totale flyten (transporten) av et vektorfelt gjennom en flate S i normalretning til flaten. Dette er ingenting annet enn flateintegralet av $F \cdot N$, der N er **enhetsnormalen** til flaten orientert i en gitt retning.

$$\iint_S F \cdot N \, \mathrm{d}\sigma = \pm \iint_U F(r(s,t)) \cdot (\partial_s r \times \partial_t r) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t,$$



Merk at $N = \dfrac{\partial_s r \times \partial_t r}{|\partial_s r \times \partial_t r|}$ og $\mathrm{d}\sigma = |\partial_s r \times \partial_t r| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t$, så lengden kansellerer.

En flate er **orienterbar** dersom den har en kontinuerligt parametriserbar normal.

Normalen gir da en 'utside' og en 'innside' til S, og orienterer randen ∂S enligt regeln til høyre.