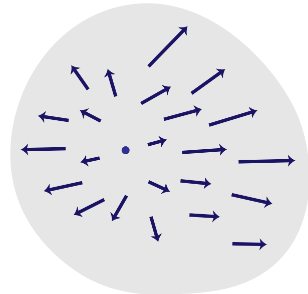
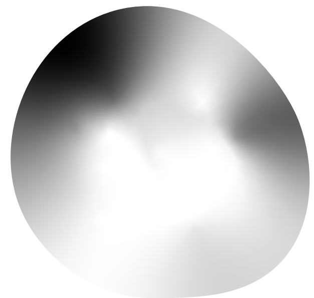
15.1–15.2 Vektor- og skalarfelt

Et **vektorfelt** er en funksjon som tildeler en vektor i $\mathbb{R}^n$ til hvert punkt i $\mathbb{R}^n$:



$$F\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Et **skalarfelt** er en funksjon som tildeler et verdi i $\mathbb{R}$ til hvert punkt i $\mathbb{R}^n$:



$$f\colon U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Eksempel:

(i) Hastighetsfelt: For gitt tid, hastighetsvektoren til partikelen i posisjon (x, y, z) i en væske eller i rommet.

(ii) Gradientfelt: gradienten til en funksjon $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er et vektorfelt $\nabla f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

(iii) Intensitetsfelt: varme, densitet, styrke på et signal i hver punkt (x, y, z) ved en måling.

$$F\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0{,}0)\} \to \mathbb{R}^2, \qquad (x, y) \mapsto \frac{(x, y)}{x^2 + y^2}.$$

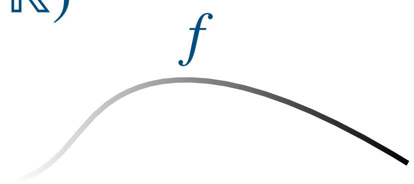
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto xy + z^2.$$

Kurvintegraler av felt

Tidligere: lengden av en glatt kurve $\gamma \in C^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ med $|\dot\gamma| \neq 0$ på (a,b),

$$\int_\gamma \mathrm{d}s = \int_a^b |\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

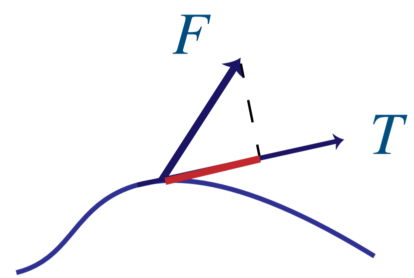
Anta $\gamma((a,b)) \subset U$. Da er **kurvintegralet av et skalarfelt** $f \in C(U,\mathbb{R})$



$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,|\dot\gamma(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Eksempel: integralet av densitet over en tråd = vekt; integralet av størrelse over en bane delt med lengden = gjennomsnittlig størrelse lengs banen.

Kurvintegralet av et vektorfelt $F \in C(U,\mathbb{R}^n)$ er integralet av projeksjonen av feltet langs enhetstangenten til kurven:

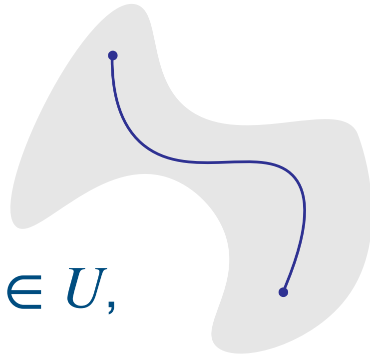


$$\int_\gamma F\cdot \mathrm{d}r = \int_\gamma F\cdot T\,\mathrm{d}s = \int_a^b F\cdot\dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t.$$

Konservative vektorfelt

Et vektorfelt $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ er **konservativt** dersom det eksisterer $\phi \in C^1(U, \mathbb{R})$;

$$\nabla \phi = F.$$

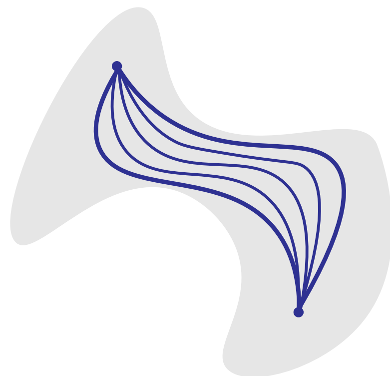


Funksjonen ϕ kalles da en **potensial** til vektorfeltet F.

En mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ er **sammenhengende** dersom for hvert par $x, y \in U$, eksisterer en kurve $\gamma \in C([0,1], U)$ med $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

Mengden er **enkelt sammenhengende** dersom alle slike kurver kan forbindes kontinuerlig: For hvert par av punkter $x, y \in U$, og hvert par av kurver $\gamma_0, \gamma_1 \in C([0,1], U)$ med $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = x, \gamma_0(1) = \gamma_1(1) = y$, eksisterer en kontinuerlig familie $\gamma_\lambda \in C([0,1] \times [0,1], U), (t, \lambda) \to \gamma_\lambda(t)$ slik at

$$\gamma_\lambda|_{\lambda=0} = \gamma_0, \qquad \gamma_\lambda|_{\lambda=1} = \gamma_1.$$



Enkelt sammenhengende mengder 'savner gjennomgående hull'.

Karakterisering av konservative vektorfelt

Teorem. $U \subset \mathbb{R}^n$ åpent og enkelt sammenhengende, $F \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$, $\gamma \in C^1((a,b), U)$ med $|\dot{\gamma}| \neq 0$. Da er følgende vilkår ekvivalente:

(i) $F \in C(U, \mathbb{R}^n)$ er konservativt ($\phi \in C^2(U, \mathbb{R})$ med $\nabla \phi = F$)

(ii) $\partial_{x_j} F_i = \partial_{x_i} F_j$ for alle $1 \leq i, j \leq n$.

(iii) $\displaystyle\int_\gamma F \cdot dr = 0$ for hver <u>lukket</u> kurve γ i U .

(iv) $\displaystyle\int_a^b F \cdot dr = \phi(\gamma(b)) - \phi(\gamma(a))$ for noen funksjon ϕ og hver kurve γ i U.

Merk. (i), (iii) og (iv) fremdeles ekvivalente også i en (kun) sammenhengende mengde.