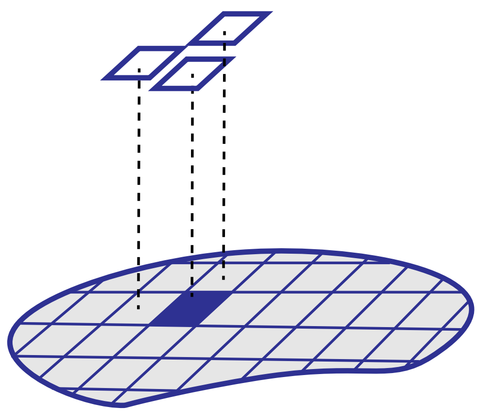
14.1–14.3 Integrasjon i planet

Den enkleste måten å innføre integraler i begrensete $U \subset \mathbb{R}^2$ er via Riemannsummer:



$$\iint_U f \,\mathrm{d}A = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{N} f(x_j, y_j)\, A(R_j)$$

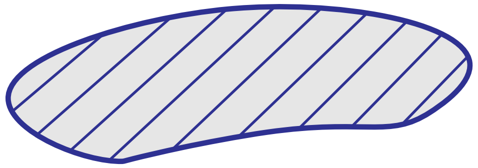
der det maksimale arealet $\max_j A(R_j) \to 0$ når $N \to \infty$,

og punktene (x_j, y_j) kan velges vilkårlig innenfor hver R_j.

Hvis høyreleddet er veldefinert, kalles f **integrerbar**. Kontinuerlige funksjoner er altid integrerbare på begrensete domener av typen nedenfor.

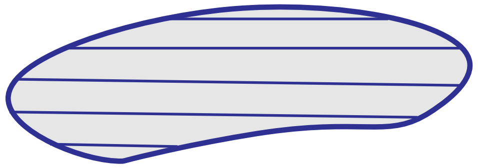
For å sikkerstille at integralet gir mening betrakter vi mengder som kan parameteriseres ved hjelp av kontinuerlige funksjoner:

$$U = \{(x, y) \colon a \le x \le b, c(x) \le y \le d(x)\},$$



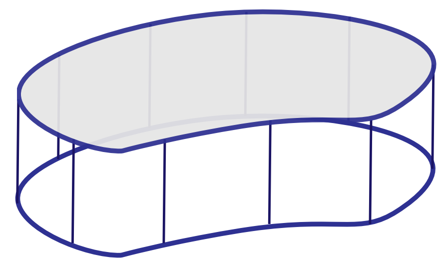
eller

$$U = \{(x, y) \colon a(y) \le x \le b(y), c \le y \le d\}.$$

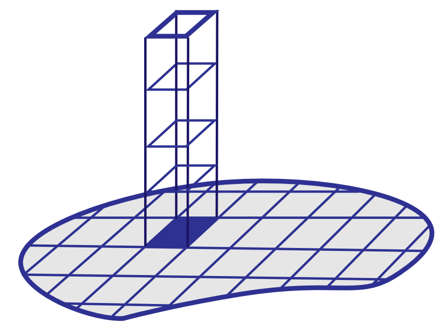


Todimensional integrasjon som itererte integraler

Integralet $\iint_U \mathrm{d}A$ beskriver **arealet** $A(U)$, eller ekvivalent, volumet til legemet med enhetshøyde over samme areal.

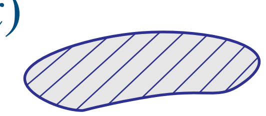


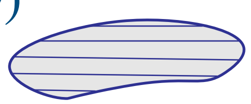
På same måte beskriver $\iint_U f\,\mathrm{d}A$ **volumet** mellom flaten $z = f(x,y)$ og xy-planet.

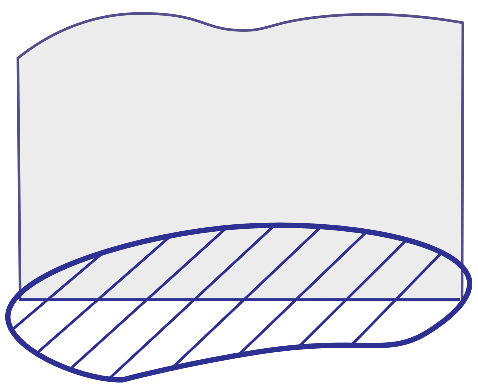


Teorem (Fubini, Tonelli, Euler, ...)

$$\iint_U \mathrm{d}A = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_c^d \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$$







dersom f er integrerbar, og U er kontinuerlig parameteriserbar som ovenfor.

Merk: volum som et integral av arealer.

Variabelsubstitusjon i dobbeltintegraler

Gitt at $\iint_U \mathrm{d}A$ eksisterer, la $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^2$ være kontinuerlig deriverbar med inverterbar Jakobimatrise $D\Phi$ på U. Da gjelder variabelbyttet

$$\iint_{\Phi(U)} f\,\mathrm{d}A = \iint_U (f\circ\Phi)\,|\,D\Phi\,|\,\mathrm{d}A.$$

Integralet gitt i kartesiske koordinater, ønsker skifte til polarkoordinater.

$$\Phi\colon (r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

$$D\Phi = \begin{bmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x \\ \partial_r y & \partial_\theta x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$ med determinant $r \neq 0$ utenfor origo.

$$\iint\limits_{\Phi(U)(x,y)} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint\limits_{U(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Trippelintegraler

Trippelintegralet $\iiint_U \mathrm{d}V$ beskriver **volumet** $V(U)$.

$\iiint_U f\,\mathrm{d}V$ er ofte et mål på en fysisk størrelse over U, som densitet, konsentrasjon, varme, etcetera. Integralet blir da et mål på totalen, f eks vekten til et legeme.

Teorem (iterert integrasjon)

La f, g, h være kontinuerlige, $U = \{(x, y, z) : g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \text{ der } (x, y) \in V\}$.
Da er:

$$\iiint_U f\,\mathrm{d}V = \iint_V \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, \cdot\,)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}A.$$

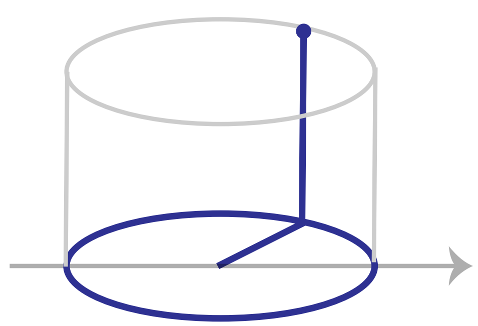
Trippelintegralet er redusert til et dobbeltintegral.

Variabelbytte i trippelintegraler

Liksom i to dimensjoner, gjelder formelen for variabelbytte

$$\iiint_{\Phi(U)} f \, \mathrm{d}V = \iiint_U (f \circ \Phi) \, |\, D\Phi \,| \, \mathrm{d}V.$$

Vanlig er sfæriske (kulekoordinater) og sylindriske koordinater:



$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta = \rho\cos\theta\sin\phi. \\ y &= r\sin\theta = \rho\sin\theta\sin\phi. \\ z &= z \qquad\;\; = \rho\cos\phi. \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\phi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\theta$$