Forelesning 1. April

1

6.13

Nå gjennstår det to resultater i kurset. Dette er viktige teoremer. Jeg velger å legge vekt på å forstå hva de sier og hvordan de kan brukes i stedet for å bruke tid på beviserne

Men det som ligger bak alt dette er fundamentalsetningen i kalkulus nemlig:

$$\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

For vi kan formulere teoremene må vi definere noen typer deriverte.

1 Dersom f er en funksjon så er.

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k.$$

Dersom F er et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$

$$F(x,y,z) = P(x,y,z)\,i + Q(x,y,z)\,j + R(x,y,z)\,k$$

så definerer vi Divergensen til F

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Eksempel

La $F(x,y,z) = (x^2 + e^y)\,i + (xyz)\,j + (z^4 - 2y)\,k$

Da er

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + e^y) + \frac{\partial}{\partial y}(xyz) + \frac{\partial}{\partial z}(z^4 - 2y)$$

$$= 2x + xz + 4z^3$$

Det siste begrepet vi skal innføre er Curlen til F

$$\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k$$

$$F = P\,i + Q\,j + R\,k.$$

Denne formelen er det umulig å huske så vi har et triks.

Tenk på curl F på følgende vis

$$\operatorname{curl} F(x,y,z) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y,z) & Q(x,y,z) & R(x,y,z) \end{vmatrix}$$

Eksempel:

La oss bruke samme vektorfelt som ovenfor

$$F(x,y,z) = (x^2+y)i + (xyz)j + (z^4-2y)k.$$

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2+y & xyz & z^4-2y \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(z^4-2y) - \frac{\partial}{\partial z}(xyz)\right)i - \left(\frac{\partial}{\partial x}(z^4-2y) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y)\right)j$$
$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(xyz) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y)\right)k =$$
$$(-2y - xy)i + 0j + (yz - y)k$$

Vi kan gjøre et par observasjoner.

① $\text{curl}(\nabla f) = 0i + 0j + 0k$

② $\text{div}(\text{curl}\, F) = 0$

La oss vise ① først

$$\text{curl}(\nabla f) = \text{curl}\left(\frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k\right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right) i - \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) j$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right) k =$$

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right) i - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}\right) j + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) k$$

$$= 0i + 0j + 0k.$$

Så til (2) La $F = Pi + Qj + Rk$

div (curl F)

$$= \operatorname{div}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 R}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 R}{\partial y \partial x}$$

$$+ \frac{\partial^2 Q}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 P}{\partial z \partial y} = 0$$

6.

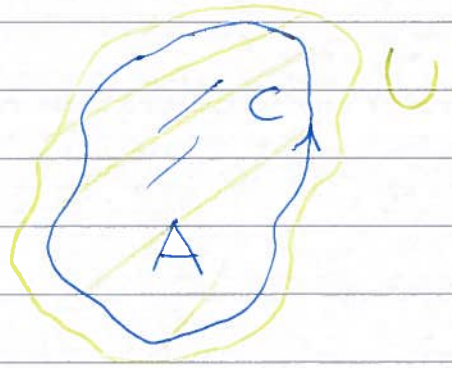
Jeg vil minne om Greens teorem:

Vi har et vektorfelt

$F(x,y) = P(x,y)\,i + Q(x,y)\,j$

i $\mathbb{R}^2$

C er en enkel lukket kurve og A er et område avgrensel av C. Dersom de partiellderiverte til P og Q er kontinuerlige i et område U som inneholder A



Da er

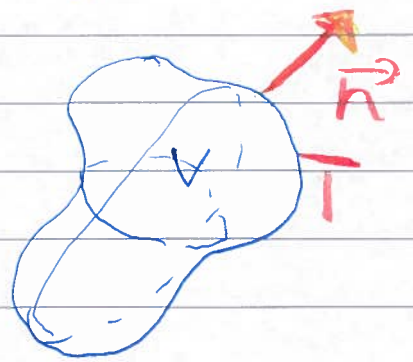
$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

Vi skal se to generaliseringer av Greens teorem til $\mathbb{R}^3$

Divergens teoremet:

V område i $\mathbb{R}^3$, T en flate som avgrenser V

$\vec{n}$ normal til T som peker ut av V, F et vektorfelt

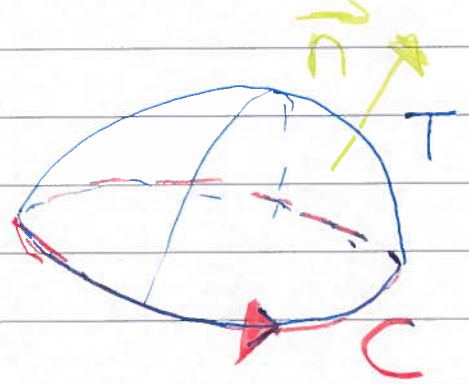


Da er

$$\int_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

Stokes teorem:

Anta T er en flate i $\mathbb{R}^3$ med randkurve C og F et vektorfelt



Da er

$$\iint_T (\operatorname{curl} F) \cdot \vec{n} \, dS = \int_C F \cdot dr$$

$\vec{n}$ er valgt som følger:
Ta høyre hånd, legg fingrene i reiseretningen av kurven. Den retningen tommelen peker er rett valg for $\vec{n}$.

Som i Greens teorem kommer disse to teoremer med noen betingelser.

Vi skal starte med å se på Divergens teoremet

For at teoremet skal virke trenger vi:

1. T er satt sammen av endelig mange glatte biter.

2. Dersom $F = Pi + Qj + Rk$

   så de partiell deriverte til P, Q og R være kontinuerlige i en åpen U som inneholder V

3. V skal være uten hull.

I resten av denne forelesningen skal vi se på flere eksempler der vi bruker Divergensteoremet.

Eksempel 1

Gå tilbake å se på

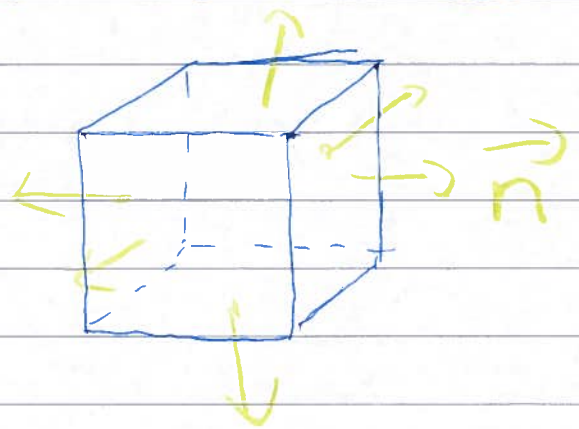
eksempel 2 i forelesningen fra 27 mars.

Da skulle $F(x,y,z) = x^2 i + xy j + 2z k$.

og T skulle være randflaten

til kuben $[0,1] \times [0,1] \times [0,1] = V$

med normal $\vec{n}$ som peker ut av kuben



Så skulle vi beregne $\int_T F \cdot \vec{n} \, dS$

Som vi ser er dette en stor jobb. Nå kan vi bruke divergens teoremet

$$\int_T F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iiint_V (2x + x + 2) \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + 2) \, dx \, dy \, dz$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 \left[\left(\frac{3}{2} x^2 + 2 \right) \Big|_0^1 \right] dy \, dz =$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{7}{2} \, dy \, dz = \underline{\underline{\frac{7}{2}}}$$

Eksempel 2:

La $F(x,y,z) = (2y - xy)\,j + xz\,k$

og beregn

$$\int_S F \cdot \vec{n}\, dS$$

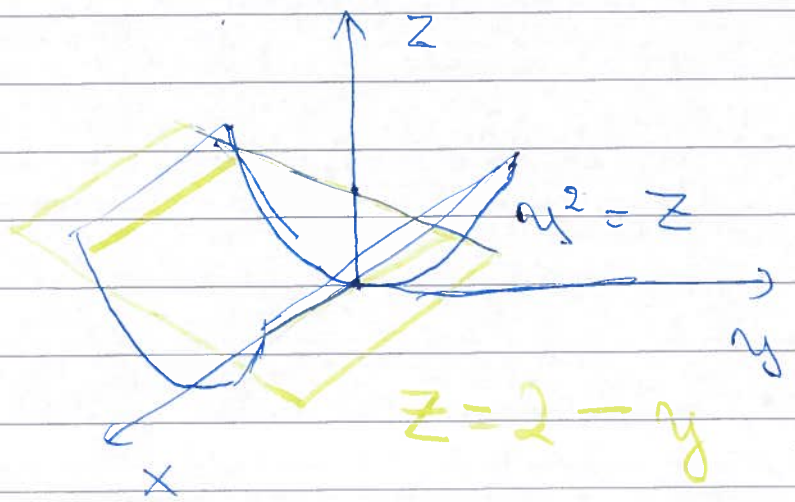
der S er randen til

området V avgrenset av

flatene $z = y^2$, $z = 2 - y$

$x = 0$ og $x = 2$

La normalen peke ut av V



Igjen kan vi ty til divergens teoremet.

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx \, dy \, dz$$

Vi kan beskrive V slik:

$$y^2 \leq z \leq 2 - y$$

$$0 \leq x \leq 2$$

Men vi trenger grenser for y så da ser vi etter hvor flatene

$$z = y^2 \quad \text{og} \quad z = 2 - y$$

møtes

Dette hender når

$$y^2 = 2 - y$$

eller

$$y^2 + y - 2 = 0$$

eller

$$y = -2 \quad \text{og} \quad y = 1$$

så grensene for

y blir

$$-2 \leq y \leq 1$$

Så:

$$\int_S F \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V \operatorname{div} F$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial y}(2y - xy) + \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right) dx\,dy\,dz$$

$$= \iiint_V (2 - x + x)\, dx\,dy\,dz = \iiint_V 2\, dx\,dy\,dz$$

15

For å beregne

$$\iiint_V 2\,dx\,dy\,dz$$

må vi velge riktig rekkefølge

på integreringen

Vi ser at grensene til z

avhenger av y så vi må
integrere med hensyn på
z før y så:

$$\iiint_V 2\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 \left[\int_{-2}^{1} \left(\int_{y^2}^{2-y} 2\,dz \right) dy \right] dx$$

$$= \int_0^2 \left(\int_{-2}^{1} \left(z \Big|_{y^2}^{2-y} \right) dy \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(\int_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,dy \right) dx =$$

$$\int_0^2 \left(2y - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 \Big|_{-2}^{1} \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left(2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(2(-2) - \frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{1}{3}(-2)^3 \right) \right) dx$$

$$= \int_0^2 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 + 2 - \frac{8}{3} \, dx$$

$$= \underline{\underline{\frac{21}{2}}}$$

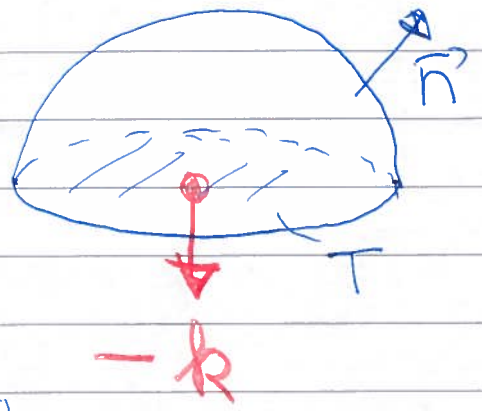
<u>Eksempel 3:</u>

La S^+ be den delen av sfæren $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ som ligger over x, y-planet og

la $F(x, y, z) = x\dot{i} + y j + xz k$

Finn $\iint_{S^+} F \cdot \vec{n} \, dS$ der

$\bar{n}$ peker opp.



Nå begrenser IKKE S^+ et område i $\mathbb{R}^3$ siden S^+ ikke er lukket

Men om vi lar T være

flaten $z = 0$ og $x^2+y^2 \leq 4$

så er $S^+ \cup T$ en lukket flate som avgrenser

$$V : \quad x^2+y^2+z^2 \leq 4 \text{ og } z \geq 0$$

så V er den øvre halvkulen med radius 2.

Gi T normalen $-k$

Da vil

$$\int_{S^+} F \cdot \vec{n}\, dS + \int_T F \cdot (-k)\, dS$$

$$= \iiint_V \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$$

La oss se på

$$\int_T F \cdot (-k)\, dS$$

Nå er $z = 0$ på T så

$F(x,y,z) = x i + y j$ på T

så $F \cdot (-k) = x\, i \cdot (-k) + y\, j \cdot (-k)$

$= 0$

Dermed er $\int_T F \cdot (-k)\, dS = 0$

så vi får

$$\int_{S^+} F \cdot \vec{n}\, dS = \iiint_V \operatorname{div} F \, dx\, dy\, dz$$

$$= \iiint_V (1+1+x)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\iiint_V (2+x)\, dx\, dy\, dz$$

Nå kan vi bytte til

kule koordinater

$$T(\rho, \phi, \theta) = (\rho \sin\phi \cos\theta, \rho \sin\phi \sin\theta, \rho \cos\theta)$$

Da er V beskrevet som

$$0 \le \rho \le 2$$

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

Legg merke til dette

og $\quad 2+x = 2+\rho\sin\phi\cos\theta$

Videre er

$$\det T' = \rho^2 \sin\phi$$

så

$$\iiint_V (2+x)\,dx\,dy\,dz =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} (2+\rho\sin\phi\cos\theta)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2} (2\rho^2\sin\phi + \rho^3\sin^2\phi\cos\theta)\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{3}\rho^3\sin\phi + \frac{1}{4}\rho^4\sin^2\phi\cos\theta\Big|_0^2\right) d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{16}{3}\sin\phi + 4\left(\frac{1}{2}(1-\cos 2\phi)\right)\cos\theta\right) d\phi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{16}{3} + (\pi+4)\cos\theta\right) d\theta = \underline{\underline{\frac{32}{3}\pi}}$$

Oppgave 7 1 April

La T være den delen av

fladen $4x^2 + 4y^2 + z^4 = 4$ som

har $z \geq 0$

Finn $\int_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ der

$\vec{n}$ peker opp.