MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2019

Øving 13

Innleveringsfrist: Tirsdag 24. april kl 23:59

Oppgave 1 (6.12:2)

Regn ut flateintegralet $\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ når $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, 0)$, og T er den delen av flaten $z = 2 - x^2 - 2y^2$ som ligger over xy-planet. Bruk enhetsnormalen med negativ z-komponent.

Oppgave 2 (6.12:8)

Regn ut flateintegralet $\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ når $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, yz, z^2)$, og T er den delen av sylinderen $y^2 + z^2 = 1$, $0 \leq x \leq 1$ som ligger over xy-planet. Bruk enhetsnormalen med positiv z-komponent.

Oppgave 3 (6.12:13)

En torus T er parametrisert ved

$$\mathbf{s}(u, v) = ((R + r\cos(u))\cos(v), (R + r\cos(u))\sin(v), r\sin(u)), \qquad 0 \leq u, v \leq 2\pi, 0 < r < R.$$

a) Vis at det fundamentale vektorproduktet er

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial v} = -r(R + r\cos(u))(\cos(u)\cos(v), \cos(u)\sin(v), \sin(u))$$

b) Regn ut $\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ når $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, z)$ og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen som peker ut av torusen.

Oppgave 4 (6.14:2[1])

Bruk divergensteoremet til å regne ut flateintegralet $\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ når

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$$

og T er overflaten til halvkulen $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $z \geq 0$. Enhetsnormalen skal peke ut av halvkulen.

Oppgave 5 (6.14:7)

I denne oppgaven er T den delen av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger over xy-planet.

a) Finn arealet til T.

b) Finn volumet til området V avgrenset av T og xy-planet.

[1] Rettet fra Lindstrøm-Hveberg

c) Finn $\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ når

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (4xz, -2yz, -z^2 + 8z)$$

og $\mathbf{n}$ er enhetsnormalen med positiv tredjekomponent.

Oppgave 6 (6.15:10)

Vektorfeltet F er definert ved $\mathbf{F}(x, y, z) = (-y, xz^2, z^2)$.

a) Beregn $\operatorname{curl} \mathbf{F}$. Er $\mathbf{F}$ et konservativt felt?

b) La T være den delen av paraboloiden $z = 2 - x^2 - y^2$ som ligger inni kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Finn arealet til T.

c) Finn $\iint_T \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS$ når $\mathbf{n}$ har positiv tredjekomponent.

Oppgave 7

Verifisér Stokes' teorem for flata $S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ med rand $\partial S = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ og vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, z)$. Med andre ord, vis at

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der ∂S er orientert mot klokka (sett fra positiv z-akse) og $\mathbf{n}$ peker vekk fra origo.

Oppgave 8

La C være den lukkede, stykkevis glatte kurven som går i rette linjer mellom punktene $(0, 0, 0)$, $(2, 0, 4)$, $(3, 2, 6)$, $(1, 2, 2)$ og tilbake til $(0, 0, 0)$, i nettopp den rekkefølgen. La S være den plane flata avgrenset av C (denne flata er nødvendigvis inneholdt i planet $z = 2x$). Bruk Stokes' teorem til å regne ut linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (z \cos(x), x^2yz, yz)$.

Oppgave U

La $\mathbf{F}$ være et vektorfelt i $\mathbb{R}^3$ med kontinuerlige førsteordens partiellderiverte. Vis at hvis $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, så finnes det et vektorfelt $\mathbf{G}$ slik at

$$\mathbf{F} = \operatorname{curl} \mathbf{G}.$$

Hint: La $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$, der $G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t)\, dt - \int_0^y F_3(x, t, 0)\, dt$, $G_2(x, y, z) = -\int_0^z F_1(x, y, t)\, dt$ og $G_3(x, y, z) = 0$.

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.