MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2019

Øving 11

Innleveringsfrist: Søndag 31. mars kl 23:59

Oppgave 1 (6.5:1)

Bruk Greens teorem til å regne ut linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},$$

hvor kurven $\mathcal{C}$ er positivt orientert.

a) $F(x, y) = (x^2 + y, x^2 y)$ og $\mathcal{C}$ er omkretsen til kvadratet med hjørner i $(0,0), (2,0), (2,2)$ og $(0,2)$.

b) $F(x, y) = (x^2 y + xe^x, xy^3 + e^{\sin(y)})$ og $\mathcal{C}$ er omkretsen til området avgrenset av parabelen $y = x^2$ og linjestykket med endepunkter $(-1, 1)$ og $(2, 4)$.

Oppgave 2 (6.5:4)

Regn ut arealet avgrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t) = \left(a \cos^3(t), b \sin^3(t)\right), \quad t \in [0, 2\pi],$$

der a og b er to positive tall.

Oppgave 3

Finn arealet begrenset av x-aksen og sykloidebuen gitt ved

$$x = a\left(\theta - \sin(\theta)\right), y = a\left(1 - \cos(\theta)\right), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

der $a > 0$.

Oppgave 4 (6.5:12)

En ellipse har ligningen

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$$

a) Finn sentrum og halvaksene til ellipsen, og lag en skisse av ellipsen i koordinatsystemet.

b) Vis at

$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos(t), -2 + 3\sin(t)), \quad t \in [0, 2\pi),$$

er en parametrisering av ellipsen. Regn ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der

$$\mathbf{F}(x, y) = (y^2, x)$$

og $\mathcal{C}$ er ellipsen med positiv orientering.

c) Regn ut

$$\iint_R (1 - 2y)\, dx\, dy,$$

der R er området avgrenset av ellipsen.

Oppgave 5 (6.5:13)

Det er en nær sammenheng mellom Greens teorem og teorien for konservative vektorfelt i seksjon 3.5. Bruk Greens teorem til å vise at dersom $\mathbf{F}$ er et konservativt felt, så er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle enkle, lukkede, stykkevis glatte kurver $\mathcal{C}$.

Oppgave 6

Anta at $\mathcal{C}$ er en enkel, lukket kurve som oppfyller betingelsene i Greens teorem, og la $D \subset \mathbb{R}^2$ være området avgrenset av $\mathcal{C}$. Vis at da er

$$\text{areal}\,(D) = \int_{\mathcal{C}} (0, x) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}} (y, 0) \cdot d\mathbf{r}.$$

Oppgave 7

La $\mathcal{C}$ være enhetssirkelen med positiv orientering, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Vektorfeltet F er ikke definert i origo, så hvis vi vil finne $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ kan vi ikke anvende Greens teorem direkte. Vi kan imidlertid definere en liten sirkel

$$\mathcal{C}_\varepsilon := \left\{ (x, y) \mid x^2 + y^2 \leq \varepsilon \right\}$$

om origo, og bruke Greens teorem på området avgrenset av $\mathcal{C}$ og $\mathcal{C}_\varepsilon$. Finn linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ved å bruke denne framgangsmåten. Verifiser så svaret du fant ved å regne ut linjeintegralet direkte.

Oppgave 8 (6.9:2)

Beregn trippelintegralet

$$\iiint_A (xy + z)\, dx\, dy\, dz$$

der $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 y\}$.

Oppgave 9 (6.10: 5)

Regn ut

$$\iiint_R \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

der $R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq 4\}$.

Oppgave U

La $\phi : D \to \mathbb{R}$ være en glatt funksjon, og anta at området $D \subset \mathbb{R}^2$ oppfyller betingelsene i Greens teorem. Vis at

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi)\,dx\,dy.$$

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.