NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Mats Ehrnstrøm

Tlf: 735 917 44

Eksamensdato: 22. mai 2018

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annen informasjon:

Eksamen innholder 10 deloppgaver, alle med samme vekting. Les igjennom samtlige oppgaver for du begynner; den opplevde vanskelighetsgraden er ikke nødvendigvis i stigende rekkefølge. Skriv tydelig og entydig, og motiver dine beregninger/beviser. Dersom en metode eller setning angis i oppgaven skal denne brukes, ellers er valget av bevis/metode fritt. Spør dersom noe er uklart.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1 Laplace-operatoren er definert ved $\Delta \overset{def.}{=} \nabla \cdot \nabla = \partial_x^2 + \partial_y^2$. La $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ være en to ganger kontinuerlig deriverbar funksjon som kun avhenger av $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Bruk kjerneregelen til å vise at

$$\Delta f = \frac{\partial^2 g}{(\partial r)^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r},$$

der $g(r) = f(x, y)$.

Oppgave 2 Gitt kurven $\gamma = \{(\cos(t), \sin(t)) \colon t \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$ og en funksjon

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} + (x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}},$$

beregn kurveintegralet

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, \mathrm{d}s$$

for vektorfeltet $\mathbf{F} = \nabla f$.

Oppgave 3 La

$$D = \{(x, y) \colon (x - 1)^2 + y^2 \leq 1\}$$

og betrakt funksjonen $f \colon D \to \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x, y) = xy \sin(\tfrac{1}{x}), \qquad x \neq 0$$

og satt til $f(0, 0) = 0$ i origo.

a) Vis at $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ eksisterer og at f er kontinuerlig i origo.

b) Det indre av D er det åpne området $\{(x - 1)^2 + y^2 < 1\}$. Vis at f er kontinuerlig deriverbar i det indre av D, og finn alle kritiske punkter til f i samme område.

c) Vis at f tar sin maksimumsverdi på D i et punkt (x, y) på randen av D, der

$$2\lambda y = x \sin\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

for en $\lambda \in \mathbb{R}$ (det er ikke nødvendig å finne dette punktet).

Oppgave 4 Betrakt mengden

$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + 2y^2 + 2z^4 = 8,\ z > 0\}.$$

a) Finn tangentplanet til flaten $\mathcal{S}$ i punktet $(2, 1, 1)$. Planet skal uttrykkes på formen $Ax + By + Cz = D$.

b) Beregn sirkulasjonen $\int_{\partial\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ langs randen av $\mathcal{S}$ for et vektorfelt med $\mathbf{curl}(\mathbf{F}) = (2y, -x, 1)$. Her er randen $\partial\mathcal{S}$ orientert mot klokka sett fra positiv z-akse.

Oppgave 5 Bruk implisitt funksjonsteorem til å vise at det rundt ethvert punkt (x, y, z) på $\mathcal{S}$ i Oppgave 4 finnes en deriverbar parametrisering r av $\mathcal{S}$.

Oppgave 6 En ellipsoide med halvakser $a, b, c > 0$ er gitt ved

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1.$$

a) Still opp et trippelintegral for volumet inneholdt i denne ellipsoiden. Beregn integralet.

Man kan oppnå maksimalt 6/10 poeng på denne deloppgaven dersom man utfører beregningen for det spesielle tilfellet $a = b = c$ når ellipsoiden er en kule med radius a.

b) Still opp et integral for overflatearealet av samme ellipsoide i tilfellet $a = b$ (med flatemålet utregnet for ditt valg av parametrisering). Beregn dette integralet når $a = b = c = \pi$.

Formler og konvensjoner

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) = \varrho\cos(\theta)\sin(\varphi), && 0 \le r, \varrho \\ y &= r\sin(\theta) = \varrho\sin(\theta)\sin(\varphi), && 0 \le \theta < 2\pi \\ z &= z \qquad\quad\; = \varrho\cos(\varphi), && 0 \le \varphi \le \pi. \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}s = |\mathbf{r}'(t)|\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$(\mathrm{d}S = |(z_x, z_y, -1)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{for} \quad z = z(x,y))$$

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \varrho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{r}'(s)\,\mathrm{d}s = \mathbf{T}\,\mathrm{d}s = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}|\mathbf{r}'(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$(\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y) = (\tfrac{dx}{dt}, \tfrac{dy}{dt})\mathrm{d}t \quad \text{for} \quad \mathbf{r} = (x,y))$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\tfrac{\partial F_3}{\partial x_2} - \tfrac{\partial F_2}{\partial x_3}, \tfrac{\partial F_1}{\partial x_3} - \tfrac{\partial F_3}{\partial x_1}, \tfrac{\partial F_2}{\partial x_1} - \tfrac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

$$\iint_A \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}A = \int_{\partial A} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$$

$$\iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F})\,\mathrm{d}V = \iint_{\partial V} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$$

$$\iint_S \operatorname{curl}(\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\,\mathrm{d}s$$