NTNU

Kunnskap for ei betre verd

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgåve i **MA1103 Fleirdimensjonal analyse**

Fagleg kontakt under eksamen:

Tlf:

Eksamensdato: . august 2019

Eksamenstid (frå–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatne hjelpemiddel: D: Ingen trykte eller handskrivne hjelpemiddel er tillatt. Bestemt, enkel kalkulator er tillatt (Casio fx-82ES PLUS, Casio fx-82EX, Citizen SR-270X, Citizen SR-270X College, Hewlett Packard HP30S).

Annan informasjon:
Det er 10 deloppgåver på eksamen, og alle vert vekta likt. Les igjennom alle oppgåvene før du startar: Opplevd vanskegrad treng ikkje være i stigande rekkjefølge. Skriv tydeleg og eintydig, og motiver alle utrekningar/bevis. Om ein metode eller setning er gitt i oppgåva, så skal denne brukast. Om ikkje står du fritt til å velge framgangsmåte sjølv. Spør viss noko er uklart.

Målform/språk: nynorsk

Sidetal: 2

Sidetal vedlegg: 2

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgåve
Originalen er:
1-sidig ☐ **2-sidig** ☒
svart/kvit ☒ **fargar** ☐
skal ha fleirvalskjema ☐

Dato Sign

Merk! Studentane finn sensur i Studentweb. Har du spørsmål om sensuren må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikkje kunne svare på slike spørsmål.

Oppgåve 1 La f være funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+3y^3}{2x^2+y^2}, & \text{når } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{når } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Vis at f er kontinuerleg i $(0,0)$.

b) Vis at den retningsderiverte til funksjonen f i punktet $(0,0)$ i retninga $\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ er lik $\frac{4}{3\sqrt{2}}$.

Oppgåve 2 La $f(x,y) = 2xy - x - y$.

a) Finn og klassifiser dei stasjonære punkta til f.

b) Finn dei globale maksimums- og minimumspunkta til f inni det lukka triangelet med hjørne $(0,0)$, $(0,2)$ og $(2,0)$.

Oppgåve 3 Finn

$$\iint_D \cos\left(x^2+y^2\right) \sin\left(x^2+y^2\right) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

der D er området over $x-$aksen og under sirkelen $x^2+y^2=1$.

Oppgåve 4 La C være kurva gitt som snittet av flatene $x^2+y^2+z^2=1$ og $x^2+y^2+(z-1)^2=1$.

a) Finn ei parametrisering av C.

b) Berekn

$$\oint_C \mathbf{F}(x,y,z) \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$$

der C går i den positive retninga og

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2y\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Oppgåve 5 La $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}.$$

Bruk divergensteoremet til å berekne

$$\iint_T \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S$$

der T er overflata til parallellepipedet utspent av vektorane $(1, -1, 0)$, $(1, 1, 0)$ og $(1, 1, 1)$, og $\mathbf{n}$ er den utvendige einingsnormalen.

Oppgåve 6 Berekn

$$\iiint_D zx \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$$

der D er området $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ og $x \leq 0$, $y \leq 0$ og $z \leq 0$.

Oppgåve 7 La f være funksjonen $f(x, y, z) = \sin(xyz)$. Finn den andre ordens taylorrekkja til f i punktet $\left(\frac{\pi}{4}, 1, 1\right)$.

Formlar og konvensjonar

Diskriminanten i andrederiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx},\ B = f_{xy},\ C = f_{yy}$$

Implisitt og Omvendt Funksjonsteoremet

Omvendt Funksjonsteoremet $\mathbf{F} : U \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$:

La $\mathbf{F}$ være kontinuerleg deriverbar og la U være ein omegn av $\bar{\mathbf{x}}$. Anta at $\mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})$ er inverterbar. Da finnast ein omegn $\bar{\mathbf{x}} \in U_0 \subset U$ slik at $\mathbf{F}$ er injektiv. Den omvende funksjonen $\mathbf{G} : V = \mathbf{F}(U_0) \to U_0$ er deriverbar i $\bar{\mathbf{y}}$ med Jacobimatrise $\mathbf{G}'(\bar{\mathbf{y}}) = \mathbf{F}'(\bar{\mathbf{x}})^{-1}$.

Implisitt Funksjonsteoremet $\mathbf{F} : U \subset \mathbf{R}^{m+k} \to \mathbf{R}^k$:

La $\mathbf{F}$ være kontinuerleg deriverbar og la U være ei open mengd. Anta at $(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) \in U$ og $\mathbf{F}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}}) = 0$. Anta vidare at $k \times k$-matrisa $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\bar{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{y}})$ er inverterbar. Da finnes det ein omegn $\bar{\mathbf{x}} \in U_0$ slik at for ein kvar $\mathbf{x} \in U_0$ finnes det ein unik vektor $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ slik at $\mathbf{F}(x, \mathbf{G}(x)) = 0$. Funksjonen $\mathbf{G} : U_0 \to \mathbf{R}^k$ er deriverbar og $\mathbf{G}'(\mathbf{x}) = -\left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{G}(\mathbf{x}))\right)$.

Formlar for Skifte av Variablar:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Sylinderkoordinatar (r, θ, z):

$$\begin{gathered} x = r\cos\theta, \quad y = r\sin(\theta), \quad z = z, \\ r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z \end{gathered}$$

Kulekoordinatar (ρ, φ, θ):

$$\begin{gathered} x = \rho\cos(\theta)\sin(\varphi), \quad y = \rho\sin(\theta)\sin(\varphi), \quad z = \rho\cos(\varphi), \\ \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin(\varphi)\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \end{gathered}$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}S = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$$

Spesialtilfellet $z = g(x, y)$:

$$\mathrm{d}S = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

Vektoranalyse $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$:

$\operatorname{curl}(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right), \quad \operatorname{div}(\mathbf{F}) = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y} + \dfrac{\partial R}{\partial z}$

Green sitt teorem: $\displaystyle\int_{\partial D} P \, \mathrm{d}x + Q \, \mathrm{d}y = \iint_D \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$

Stokes sitt teorem: $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{curl}(\mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S = \iiint_V \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, \mathrm{d}V$