NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Gabriele Bruell

Tlf: +49 16094438246

Eksamensdato: 23. mai 2017

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Det skal være med så mye mellomregning at framgangsmåten går tydelig fram. En liste med formler er vedlagt på siste sider av eksamenspapirene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 1

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Vis at

i) f er kontinuerlig i $(x,y) = (0,0)$,

ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer, men f er ikke deriverbar i $(0,0)$.

b) La $g(t) = (at, bt)$ med konstanter a og b ulik 0 og verifiser at

$$(f \circ g)'(0) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}, \qquad \text{men} \qquad \nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0.$$

Forklar at dette ikke er i strid med kjerneregelen.

Oppgave 2 Banen til to romskip, som startet for lenge siden og langt unna, er gitt ved kurver i rommet. La t betegne tiden. Banen til romskip A er gitt ved

$$\mathbf{r}_A(t) = (t, t^2, t^2 - t)$$

og banen til romskip B er gitt ved

$$\mathbf{r}_B(t) = (8 - t, t^2 - 4, t^2 - 2t).$$

Ved hvilken tid $t \geq 0$ er det minst avstand mellom romskipene?

Oppgave 3

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkt til

$$f(x,y) = x^3 - y^2 - 3x - 6y - 1.$$

b) Finn den største og minste verdien til $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$ på kvartsirkelen $x^2 + y^2 = 1$, $x, y \geq 0$.

Oppgave 4

a) Beregn dobbeltintegralet $\iint_R \frac{x}{x^2+y^2}\, d(x,y)$, der R er gitt ved $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$.

b) Beregn trippelintegralet $\iiint_D e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\, d(x,y,z)$, der D er gitt ved $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ og $z \geq 0$.

c) Skisser integrasjonsområdet for

$$\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\, dy\, dx$$

og bytt integrasjonsrekkefølgen til $dx\, dy$.

Oppgave 5

a) La T være flata gitt ved $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4 \text{ og } 0 \leq z \leq 1\}$ og $\mathbf{F}$ være vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x + \sin(z^2 y), x^2 + z, 1 - z).$$

Regn ut $\operatorname{div} \mathbf{F}$ og finn

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS,$$

der normalvektoren $\mathbf{n}$ peker ut av T.

b) La S være ei kuleflate i $\mathbb{R}^3$ og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et glatt vektorfelt. Vis at

$$\iint_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, dS = 0.$$

List of formulas for MA1103 Vector Calculus 2017

Taylor's formula.

First-order Taylor approximation at $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

$$T_1(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0).$$

Second-order Taylor approximation at $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$.

$$T_2(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^0)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0).$$

Change of variables formula.

Change of variables formula for polar coordinates.

$$\iint_D f(x,y)\, d(x,y) = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\, d(r,\theta).$$

Change of variables formula for cylindrical coordinates.

$$\iiint_W f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\, d(r,\theta,z).$$

Change of variables formula for spherical coordinates.

$$\iiint_W f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint_{W^*} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) r^2 \sin\phi\, d(r,\theta,\phi).$$

Integrals over curves. Let C be a curve parameterized by $\mathbf{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Scalar fields. $f : C \to \mathbb{R}$

$$\int_C f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt.$$

Vector fields. $\mathbf{F} : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot\, d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$

Integrals over surfaces. Let T be a surface parameterized by $\mathbf{r} : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Scalar fields. $f : T \to \mathbb{R}$

$$\iint_T f\, dS = \iint_A f(\mathbf{r}(u,v)) \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| d(u,v).$$

Vector fields. $\mathbf{F} : T \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\iint_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = \iint_A \mathbf{F}(\mathbf{r}(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) d(u,v).$$

Green's Theorem.

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) d(x,y) = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Stokes' Theorem.

$$\iint_S (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Divergence Theorem.

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{F}\, d(x,y,z) = \iint_{\partial V} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}\, d\mathbf{S}.$$