MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 9

Innleveringsfrist: Søndag 18. mars kl 23:59

Oppgave 1

La $R = [0,1] \times [0,1]$, og regn ut dobbeltintegralene:

a) $\iint_R x^m y^n \, dx \, dy$ for $m, n > 0$

b) $\iint_R (ax + by + c) \, dx \, dy$

c) $\iint_R \sin(x + y) \, dx \, dy$

Oppgave 2

Anta at funksjonen f er kontinuerlig på intervallet $[a, b]$, og funksjonen g er kontinuerlig på intervallet $[c, d]$. Vis at da er

$$\iint_R [f(x)g(y)] \, dx \, dy = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right) \cdot \left(\int_c^d g(y) \, dy \right),$$

der R er rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$.

Oppgave 3 (6.1:7)

Anta at $f : R \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon på rektangelet $R = [a, b] \times [c, d]$. Vis at det finnes et punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ i R slik at

$$\frac{\iint_R f(x, y) \, dx \, dy}{|R|} = f(\bar{x}, \bar{y}),$$

der $|R|$ er arealet til R. Dettes kalles ofte *middelverdisetningen for dobbeltintegraler.*

Oppgave 4

Finn volumet under grafen til $z = x^2 + y$ over rektangelet $R = [0, 1] \times [1, 2]$.

Oppgave 5 (6.2:1)

Regn ut dobbeltintegralene

a) $\iint_R y \, d(x, y)$ der $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le y \le 2 \text{ og } y \le x \le y^2\}$.

b) $\iint_R x^2 y \, d(x, y)$ der R er området avgrenset av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$.

Oppgave 6

La $f : [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{hvis } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{hvis } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Vis at

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{\pi}{4} \qquad \text{og} \qquad \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \frac{\pi}{4}.$$

Hvorfor er ikke dette i strid med Korollar 6.1.10?

Hint: Det kan være til hjelp å regne ut de andreordens partiellderiverte av $\arctan(\frac{y}{x})$.

Oppgave 7 (6.2:3)

Noen integraler er enklere å regne ut hvis vi bytter integrasjonsrekkefølgen. Løs disse integralene ved å utføre integrasjonene i motsatt rekkefølge. (*Hint:* Lag en skisse over integrasjonsområdet før du prøver å bytte integrasjonsrekkefølgen.)

a) $\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right]\,dy$

b) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y^2}}\,dy\right]\,dx$

Oppgave 8 (6.2:4)

Se på definisjonen av dobbeltintegral over et vilkårlig begrenset område A (som ikke nødvendigvis er rektangulært) på s. 570–571 i læreboka. Vis at verdien til $\iint_A f(x,y)\,d(x,y)$ ikke avhenger av hvilket rektangel R vi bruker i definisjonen.

Oppgave 9 (6.7:3a)

Regn ut $\iint_R xy\,d(x,y)$, der R er området avgrenset av linjene $x + 2y = -1$, $x + 2y = 3$, $x = y + 1$ og $x = y + 4$. Bruk substitusjonen $u = x + 2y$, $v = x - y$.

Oppgave U

Anta at funksjonen f er kontinuerlig og at $f \geq 0$ på rektangelet $R = [a,b] \times [c,d]$. Vis at hvis $\iint_R f\,dA = 0$, så er $f = 0$ på hele R.

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.