MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 8

Innleveringsfrist: Søndag 11. mars kl 23:59

Oppgave 1

Finn annenordens Taylor-polynom for flervariabelfunksjonen $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy)$ om punktet $(0, 0)$.

Oppgave 2 (5.9:4)

Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y) = x^3 + 5x^2 + 3y^2 - 6xy,$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

Oppgave 3 (5.9:7)

Finn de stasjonære punktene til funksjonen

$$f(x, y, z) = xyz - x^2 - y^2 - z^2,$$

og avgjør om de er lokale maksimumspunkter, minimumspunkter eller sadelpunkter.

Oppgave 4

La

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + kyz.$$

a) Vis at $(0, 0, 0)$ er et stasjonært punkt for f.

b) For hvilke verdier av k er $(0, 0, 0)$ et lokalt minimum?

Oppgave 5

Vis at av alle rektangulære bokser med et gitt volum V, så har en kubisk boks det minste overflatearealet.

Oppgave 6

Finn ekstremalverdipunktene til funksjonen $f(x, y, z) = x - y + z$ under bibetingelsen $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Oppgave 7

Finn globalt minimum og maksimum for funksjonen $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ på disken $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å bestemme funksjonens maksimums- og minimumsverdi på randen $\partial D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Oppgave 8

Finn punktene på kurven parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin(t/2)), \quad 0 \leq t \leq 4\pi,$$

som ligger lengst unna origo.

Oppgave 9 (5.10:3)

Finn punktene på skjæringskurven mellom flatene $x^2+y^2 = 1$ og $x^2-xy+y^2-z^2 = 1$ som ligger nærmest origo.

Oppgave U

Vi skal nå se hvor vanskelig det er å finne alternative betingelser for klassifisering av ekstremalpunkter når annenderiverttesten feiler. La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2),$$

og vis at:

a) Punktet $(0, 0)$ er et stasjonært punkt for f.

b) f har et lokalt minimum i $(0, 0)$ langs enhver rett linje gjennom punktet. Med dette mener vi at hvis $g(t) = (at, bt)$, så har $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et lokalt minimum i 0 for alle verdier av a og b.

c) Funksjonen f har *ikke* et lokalt minimum i punktet $(0, 0)$.

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.