MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 7

Innleveringsfrist: Søndag 4. mars kl 23:59

Oppgave 1 (3.9:1)

Finn to parametriseringer av paraboloiden $z = x^2 + y^2$, én ved hjelp av vanlige koordinater (x, y) og én ved hjelp av polarkoordinater (r, θ).

Oppgave 2

Finn en parametrisering av den delen av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ som ligger i første oktant (dvs. i området der $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$).

Oppgave 3

Finn en parametrisering av den delen av sylinderflaten $x^2 + z^2 = 4$ som ligger mellom $y = 0$ og $y = 1$.

Oppgave 4 (3.9:8)

Finn en parametrisering av den delen av kuleflaten $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ som ligger over xy-planet og inni kjeglen $z^2 = 3(x^2 + y^2)$.

Oppgave 5 (5.7:1)

Vis at funksjonen $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y + 1, x - y - 2)$ har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn om $(1, -2)$ slik at $\mathbf{G}(1, -2) = (0, 0)$. Finn den deriverte til $\mathbf{G}$ i punktet $(1, -2)$. Vis at $\mathbf{F}$ også har en omvendt funksjon $\mathbf{H}$ definert i en omegn om $(1, -2)$ slik at $\mathbf{H}(1, -2) = (-1, -1)$. Finn $\mathbf{H}'(1, -2)$.

Oppgave 6 (5.7:3)

Vis at gjennom ethvert punkt (x_0, y_0) på kurven med ligning $x^3 + y^3 + y = 1$ går det en funksjon $y = f(x)$ som tilfredsstiller ligningen. Finn $f'(x_0)$.

Oppgave 7 (5.7:4)

La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være funksjonen $f(x, y, z) = xy^2e^z + z$. Vis at det finnes en funksjon $g(x, y)$ definert i en omegn om $(-1, 2)$ slik at $g(-1, 2) = 0$ og $f(x, y, g(x, y)) = -4$. Finn $\frac{\partial g}{\partial x}(-1, 2)$ og $\frac{\partial g}{\partial y}(-1, 2)$.

Oppgave 8 (5.7:9)

Når man løser differensialligninger, finner man ofte ut at løsningene tilfredsstiller en ligning av typen $\phi(x, y(x)) = C$ der C er en konstant. Vis at

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x))}$$

forutsatt at de partiellderiverte eksisterer og $\frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0$.

Oppgave 9 (5.7:12)

Vis at det finnes funksjoner $u(x, y)$ og $v(x, y)$ definert i et område rundt $(2, -1)$ som tilfredsstiller ligningene

$$x^2 - y^2 - u^2 + v^2 = 0$$

$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

og $u(2, -1) = 2$, $v(2, -1) = 1$. Finn $\frac{\partial u}{\partial x}(2, -1)$ og $\frac{\partial v}{\partial x}(2, -1)$.

Oppgave U

Skriv ned de viktigste stegene i beviset for Teorem 5.7.11, inkludert Lemma 5.7.9 og 5.7.10. Merk: Du skal ikke gjennomføre beviset, men prøve å kommunisere hvordan det er bygget opp.

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.