MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 6

Innleveringsfrist: Søndag 25. februar kl 23:59

Oppgave 1 (3.4:1,3)

Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når

a) $\mathbf{F}(x, y) = (y, x)$ og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (2t, -3t)$, $t \in [1, 3]$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (zy, x^2, xz)$ og kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [0, 2]$.

Oppgave 2 (3.4:6)

Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$ og $\mathcal{C}$ er sirkelen med sentrum i origo og radius 5. C skal gjennomløpes i positiv retning (dvs. mot klokken).

Oppgave 3 (3.4:8)

La $\mathcal{C}$ være omkretsen av trekanten med hjørner i punktene $(0, 0), (\pi, 0)$ og (π, π). Regn ut $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ når $\mathbf{F}(x, y) = (\cos(x)\sin(y), x)$ og $\mathcal{C}$ er positiv orientert (dvs. mot klokken).

Oppgave 4

La $\mathcal{C}$ være en glatt kurve parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$.

a) Anta at $\mathbf{F}$ står ortogonalt på $\mathbf{r}'(t)$ i alle punkter $\mathbf{r}(t)$. Vis at da er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.

b) Anta at $\mathbf{F}$ er parallell med $\mathbf{r}'(t)$ i alle punkter $\mathbf{r}(t)$. Vis at da er $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} |\mathbf{F}|\, ds$.
Merk: Når vi sier at $\mathbf{F}$ og $\mathbf{r}'(t)$ er parallelle, mener vi at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = \lambda(t)\mathbf{r}'(t)$ for $\lambda(t) > 0$.

Oppgave 5

Anta at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon og at kurven $\mathcal{C}$ er grafen til en kontinuerlig deriverbar funksjon $g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Vis at da er

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f\left(x, g(x)\right) \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx.$$

Legg merke til at dette medfører at lengden av grafen til en kontinuerlig deriverbar funksjon g på $[a, b]$ er gitt ved

$$\int_a^b \sqrt{1 + (g'(x))^2}\, dx.$$

Oppgave 6 (Eksamen V2016, oppgave 5)

La $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xy, x^2, z)$. Beregn linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

når

i) $\mathcal{C}$ er kurven parametrisert ved $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (\cos(t), \sin(2t), \sin^2(t))$.

ii) C er en vilkårlig glatt kurve med startpunkt $(0, 0, 0)$ og sluttpunkt $(1, -2, \sqrt{2})$.

Oppgave 7

Avgjør om feltet er konservativt og i så fall finn en potensialfunksjon.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$,

b) $\mathbf{F}(x, y) = (xy, xy)$,

c) $\mathbf{F}(x, y) = (2x\cos(y) + \cos(y), x^2 \sin(y) + x\sin(y))$.

Oppgave 8

La $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ være flaten parametrisert ved $\Phi : [0, 1] \times [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3, (r, \theta) \mapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta), \theta)$.

a) Gi en geometrisk beskrivelse av, samt skissér flaten $\mathcal{S}$.

b) Finn enhetsnormalen $\mathbf{N}$ til $\mathcal{S}$ i et vilkårlig punkt $\Phi(r, \theta)$.

c) Finn en ligning for tangentplanet til $\mathcal{S}$ i punktet $\Phi(r, \theta)$.

Oppgave U

Anta at kurven $\mathcal{C}$ er lukket. Vis at integralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ over vektorfeltet $\mathbf{F}$ har samme verdi uansett hvilket punkt på kurven vi bruker som start-/stoppsted (forutsatt at orienteringen er den samme).

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.