MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 5

Innleveringsfrist: Søndag 18. februar kl 23:59

Oppgave 1 (3.1.1)

En parametrisert kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = (t^3, t^2)$$

.

a) Finn $\mathbf{v}(t)$, $v(t)$, $\mathbf{a}(t)$ og $a(t)$.

b) Finn buelengden til kurven $\mathbf{r}(t)$ fra $t = 0$ til $t = 10$.

Oppgave 2 (3.1.7)

En kurve er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (a\cos(t), b\sin(t)), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

a) Vis at denne kurven er ellipsen med ligning $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

b) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

c) Vis at omkretsen til ellipsen er $\int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2(t) + b^2\cos^2(t)}\, dt$.

Oppgave 3 (3.1.10)

Vi har $\mathbf{r}(t) = (2\cos(t), \sqrt{2}\sin(t), \sqrt{2}\sin(t))$.

a) Finn hastigheten, farten og akselerasjonen.

b) Finn buelengden fra $t = 0$ til $t = 2\pi$.

c) Vis at kurven ligger på en kuleflate med sentrum i origo.

d) Vis at kurven ligger i planet $y - z = 0$.

Oppgave 4

Gi en parametrisering av tangentlinjen til kurven $\mathbf{c}(t) = (\cos^2(t), 3t - t^3, t)$ ved $t = 0$.

Oppgave 5 (3.2.8)

Anta at $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ har kontinuerlige annenordens partiellderiverte, og at $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ der x og y er to ganger deriverbare. La $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Vis at

$$g''(t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{r}(t))x'(t)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{r}(t))x'(t)y'(t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{r}(t))y'(t)^2 + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{r}(t))x''(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{r}(t))y''(t).$$

Oppgave 6

Gitt en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ og en parametrisering $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$, la $g(t) = f(\mathbf{r}(t))$. Verifiser at kjerneregelen for parametriske kurver gjelder (dvs. vis at $g'(t) = \nabla f(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$) når:

a) $f(x, y) = xy$ og $\mathbf{r}(t) = (e^t, \cos t)$

b) $f(x, y) = (x^2 + y^2)\log(\sqrt{x^2 + y^2})$ og $\mathbf{r}(t) = (e^t, e^{-t})$

Oppgave 7 (3.3.3)

Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ når $f(x, y, z) = z\cos(xy)$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 5t\mathbf{k}, \quad t \in [0, \sqrt{\pi}].$$

Oppgave 8 (3.3.6)

Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$ når $f(x, y, z) = xyz$ og $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}, \quad t \in [0, 1].$$

Oppgave 9 (3.3.12)

En kurve i polarkoordinater er gitt ved en funksjon $r = f(\theta)$ der $\theta \in [a, b]$.

a) Vis at kurven har parametriseringen

$$\mathbf{r}(\theta) = f(\theta)\cos\theta\mathbf{i} + f(\theta)\sin\theta\mathbf{j}, \quad \theta \in [a, b].$$

b) Vis at farten er gitt ved

$$v(\theta) = \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2}.$$

c) Anta at $f(\theta) = \sin\theta$ og $\theta \in [0, \pi]$. Skisser kurven og regn ut buelengden.

d) Regn ut linjeintegralet $\int_{\mathcal{C}} g\, ds$ der $\mathcal{C}$ er kurven i punkt c) og $g(x, y) = xy$.

Oppgave U

La $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en deriverbar funksjon av to variable og anta at det finnes en deriverbar funksjon $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ slik at

$$G(x, y(x)) = 0 \qquad \text{for all} \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Vis at

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial G}{\partial y}(x, y(x))} \qquad \text{når} \quad \frac{\partial G}{\partial y}(x, y(x)) \neq 0.$$

b) Anta at y er gitt implisitt ved

$$x^2 + y^3 + e^y = 0.$$

Regn ut $\frac{dy}{dx}$ (avhengig av x og y).