MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 4

Innleveringsfrist: Søndag 11. februar kl 23:59

Oppgave 1

Finn alle annenordens partiellderiverte av

a) $f(x,y,z) = 3x^2 + 2y^2 + z$

b) $f(x,y) = \sin(x^2 - 3xy)$

Oppgave 2

Finnes det en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, med kontinuerlige annenordens partiellderiverte, hvis førsteordens partiellderiverte er

$$f_x(x,y) = 2x - 5y \qquad \text{og} \qquad f_y(x,y) = 4x + y?$$

Oppgave 3 (2.5: 4)

I denne oppgaven skal vi se på en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Funksjonen er gitt ved

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{når} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Vis at $f(x,0) = 0$ for alle x og at $f(0,y) = 0$ for alle y. Bruk dette til å vise at $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

b) Vis at for $(x,y) \neq (0,0)$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^4 + 4x^2y^2 - y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{x(y^4 + 4x^2y^2 - x^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) Vis at $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = -1$ ved å bruke

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}.$$

Vis på tilsvarende måte at $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 1$.

Oppgave 4 (2.6: 1)

Finn Jacobi-matrisen til funksjonene:

a) $\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2y \\ x+y^2 \end{pmatrix}$

b) $\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^{x^2y+z} \\ xyz^2 \end{pmatrix}$

Oppgave 5

La $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være deriverbar i punktet $\mathbf{a} \in A$. Argumenter for at funksjonen $g(\mathbf{x}) = f^2(\mathbf{x}) + 2f(\mathbf{x})$ er deriverbar i $\mathbf{a} \in A$ og bestem gradienten $\nabla g(\mathbf{a})$.

Oppgave 6 (2.7: 2)

La $f(u,v) = ue^{-v}$, $g(x,y,z) = 2xy + z$, $h(x,y,z) = 2y(z+x)$. Bruk kjerneregelen til å finne de partiell-deriverte av $k(x,y,z) = f(g(x,y,z), h(x,y,z))$.

Oppgave 7 (2.7: 5)

Vi har to derivarbare funksjoner $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Anta at $\mathbf{G}(1,-2) = (1,2,3)$ og at

$$\mathbf{G}'(1,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}'(1,2,3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finn Jacobi-matrisen til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ i punktet $(1,-2)$.

Oppgave 8

Finn lineariseringen til funksjonen

a) $f(x,y) = e^{x+y}$ i punktet $(x,y) = (0,0)$;

b) $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y, xy + x)$ i punktet $(x,y) = (-2,1)$.