MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 3

Innleveringsfrist: Søndag 4. februar kl 23:59

Oppgave 1

Finnes det en kontinuerlig utvidelse av $f(x,y) = \frac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$ (med definisjonsmengde $D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbf{0}$) til hele $\mathbb{R}^2$?

Oppgave 2

La $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ være funksjoner deriverbare i punktet $\mathbf{a} \in A$. Vis at

$$\nabla(fg)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a}).$$

Oppgave 3

Finn gradienten til funksjonen

a) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$

b) $f(x,y,z) = z + x^2 y + e^{y\cos(xz)}$

Oppgave 4 (2.4: 3)

Finn den retningsderiverte $f'(\mathbf{a};\mathbf{r})$ til f i punktet $\mathbf{a}$ og retningen $\mathbf{r}$:

a) $f(x,y,z) = x^2 y + z^2$, $\mathbf{a} = (1,0,1)$, $\mathbf{r} = (1,1,-1)$

b) $f(x,y,z) = z\sin(xy)$, $\mathbf{a} = (\frac{\pi}{2},1,0)$, $\mathbf{r} = (2,0,-1)$

Oppgave 5

La $f(x,y) = 100 - 2x^2 - 3y^2$.

a) I hvilken retning vokser f raskest når vi står i punktet $(2,3)$?

b) I hvilket punkt (x,y) tar f sin største verdi?

c) Vis at gradienten til f er null i punktet du fant i b).

Oppgave 6 (2.4: 7)

Vi ser på funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{for} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{for} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Vis at $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. Hva er $\nabla f(0,0)$?

b) Vis at selv om de retningsderiverte til f eksisterer i $\mathbf{0}$, er funksjonen verken kontinuerlig eller deriverbar i dette punktet.

c) Bruk definisjonen av den retningsderiverte til å vise at $f'(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = r_1^2/r_2$ der $\mathbf{r} = (r_1, r_2)$, $r_2 \neq 0$.

d) Vis at for denne funksjonen gjelder ikke likheten $f'(\mathbf{0}; \mathbf{r}) = \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{r}$. Hvorfor motsier ikke dette setning 2.4.8 (s. 124 i læreboka)?

Oppgave 7

Vis at funksjonen

$$f(x,y) = \begin{cases} (x+y)^3 \sin\left(\frac{1}{x+y}\right) & \text{for } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

er deriverbar i punktet $(0,0)$.