MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 2

Innleveringsfrist: Søndag 28. januar kl 23:59

Oppgave 1 (2.1: 1)

Finn definisjonsområdet til funksjonen:

a) $f(x, y) = \ln(x + y)$

b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$

Oppgave 2

Anta at $A \subset \mathbb{R}^n$, og at funksjonene $\mathbf{F}, \mathbf{G} : A \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlige i $\mathbf{a} \in A$. Vis at $\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}$ er kontinuerlig i $\mathbf{a}$.

Oppgave 3 (2.2: 3)

Vis at koordinatfunksjonene $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i$ er kontinuerlige ved å bruke definisjonen av kontinuitet (ε-δ-definisjon).

Oppgave 4 (2.2: 5)

I denne oppgaven har du bruk for den omvendte trekantulikheten, som sier at for alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ så er $|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$.

a) La $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Vis at funksjonen $f(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|$ er kontinuerlig.

b) Vis at funksjonen $g(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\|}$ er kontinuerlig der den er definert.

Oppgave 5 (2.2: 2)

Vis at funksjonen $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 z + y, x^2 \sin(xyz), x^3)$ er kontinuerlig.

Oppgave 6

Regn ut grenseverdiene hvis de eksisterer:

a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$

c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Oppgave 7

La

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6}, & \text{når} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{når} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Finn grenseverdien av f når $(x,y) \to (0,0)$ langs linjen $x = 0$.

b) Finn grenseverdien av f når $(x,y) \to (0,0)$ langs kurven $x = y^3$.

c) Konkluder med at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$.

Oppgave 8

La $f(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2-1}$. Gi en geometrisk beskrivelse av mengden i $\mathbb{R}^3$ hvor f ikke er kontinuerlig.

Oppgave U

Definisjon: En mengde $U \subset \mathbb{R}^n$ kalles *åpen* hvis det for ethvert element $\mathbf{x} \in U$ finnes et tall $\varepsilon > 0$ slik at kulen $B_\varepsilon(\mathbf{x}) \subset U$.

Vis at en funksjon $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ er kontinuerlig hvis og bare hvis det inverse bildet $\mathbf{F}^{-1}(U)$ er en åpen mengde i $\mathbb{R}^n$ for hver åpne mengde U i $\mathbb{R}^m$.

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.