MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 12

Innleveringsfrist: Søndag 15. april kl 23:59

Oppgave 1 (6.10:1c))

Bruk sylinderkoordinater til å beregne

$$\iiint_A z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz,$$

når $A := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+(y-1)^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$.

Oppgave 2 (6.10:2b))

Bruk kulekoordinater til å beregne

$$\iiint_A x\,dxdydz,$$

når $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y \geq 0, z \geq \frac{1}{2}, x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$.

Oppgave 3 (6.10:6)

La A være kulen med sentrum i origo og radius R, og anta at $a > R$. Vis at

$$\iiint_A \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-a)^2}}\,dxdydz = \frac{4\pi R^3}{3a}.$$

Dette resultatet er viktig i fysikk der det kan brukes til å vise at gravitasjonskraften fra en homogen kule er den samme som om all massen var samlet i sentrum.

Oppgave 4

Finn volumet av området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av flatene $z = x^2+y^2$ og $z = 10-x^2-2y^2$.

Oppgave 5 (6.11:6)

Finn massen til sylinderen $x^2+y^2 \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, når tettheten er $f(x,y,z) = 1/(x^2+y^2+z^2)$.

Oppgave 6 (6.11:9)

La D være det begrensede området i $\mathbb{R}^3$ som er gitt ved ulikhetene $x^2+y^2 \leq z \leq \sqrt{2-x^2-y^2}$. Finn volumet av D.

Oppgave 7 (6.11:11)

R er området i $\mathbb{R}^3$ avgrenset av flatene $z = 6 - x^2 - y^2$ og $z = x^2 - 4x + y^2$.

a) Vis at integralet $I = \iiint_R y\,dxdydz$ er lik
$$\iint_S (6y - 2x^2y - 2y^3 + 4xy)\,dxdy$$
der $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

b) Regn ut integralet i a)

c) C er skjæringskurven mellom flatene $z = 6 - x^2 - y^2$ og $z = x^2 - 4x + y^2$, og den er orientert mot klokken sett ovenfra. Vis at C har parametriseringen
$$\mathbf{r}(t) = (1 + 2\cos(t), 2\sin(t), 1 - 4\cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$
og regn ut kurveintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der $\mathbf{F}(x, y, z) = (z, y, x)$.

Oppgave U

Anta at $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig, og la $B_\varepsilon := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x, y, z)\| < \varepsilon\}$ være kula med radius $\varepsilon > 0$ sentrert i origo. Vis at
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \iiint_{B_\varepsilon} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = f(0, 0, 0),$$
der $|B_\varepsilon|$ er volumet til B_ε.

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.