MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Øving 10

Innleveringsfrist: Søndag 25. mars kl 23:59

Oppgave 1 (6.7:1)

Løs dobbeltintegralet $\iint_A x\,dx\,dy$, der A er parallellogrammet med hjørner $(0,0)$, $(3,0)$, $(1,1)$ og $(4,1)$, ved å bruke substitusjonen $u = x - y$ og $v = y$.

Oppgave 2 (6.7:7)

La A være parallellogrammet utspent av to vektorer $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ som ikke er parallelle, og la M være matrisen $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

a) Vis at avbildningen $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ avbilder enhetskvadratet K utspent av $\mathbf{e}_1$ og $\mathbf{e}_2$ på A.

b) Vis at for alle kontinuerlige funksjoner f er

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = |\det(M)| \int_0^1 \int_0^1 f(au + cv, bu + dv)\,du\,dv.$$

c) Regn ut $\iint_A e^{2x-3y}\,dx\,dy$ der A er parallellogrammet utspent av $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Oppgave 3

Løs dobbeltintegralet

$$\iint_R xy^2\,dx\,dy$$

ved bruk av polarkoordinater, der R er området i første kvadrant som ligger innenfor sirkelen $x^2 + y^2 = 9$.

Oppgave 4 (6.3:4)

Vi har en positiv kontinuerlig funksjon $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$. Et område A består av de punktene i planet som har polarkoordinater (r, θ) slik at $\alpha \le \theta \le \beta$, $0 \le r \le r(\theta)$. Vis at arealet til A er

$$|A| = \frac{1}{2} \int_\alpha^\beta r(\theta)^2\,d\theta.$$

Bruk denne formelen til å finne arealet til området avgrenset av kurven

$$r(\theta) = \sin(2\theta), \qquad \theta \in [0, \pi/2].$$

Lag en skisse av området.

Oppgave 5

Hvis $f(x, y) = e^{\sin(x^2+y^2)}$ og $R = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$, vis at

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \iint_R f(x, y)\, dx\, dy \leq e.$$

Oppgave 6 (6.4: 1)

Beregn volumet til området E som ligger over xy-planet og under grafen $z = 4 - (x-2)^2 - (y+1)^2$.

Oppgave 7 (6.4: 3)

En plate dekker området $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1,\ x^2 \leq y \leq 1\}$ og har tetthet $f(x, y) = xy$. Finn massemiddelpunktet.

Oppgave 8 (6.4: 12)

En sylinderflate T har parametriseringen

$$\mathbf{r}(u, v) = (u, 5\cos(v), 5\sin(v)), \qquad u \in [0, 2], \quad v \in [0, 2\pi].$$

Tegn en skisse av flaten og regn ut flateintegralet $\iint_T x\, dS$.

Oppgave 9 (6.4: 17)

La D være det begrensede området i $\mathbb{R}^3$ som ligger over xy-planet og inni både paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ og sylinderen $x^2 + y^2 = 1$.

a) Finn volumet til D.

b) Finn arealet av den delen av randflaten til D som ligger på paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$.

Oppgave U

La $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [a, b],\ y \in [0, f(x)]\}$, der $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ er en positiv og begrenset funksjon. Vis at mengden A er Jordan-målbar hvis og bare hvis f er integrerbar på $[a, b]$.

Merknad: Oppgave U er en *utfordring*, dvs en frivillig oppgave som er mer teoretisk eller omfangsrik.