MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Løsningsskisse øving 6

Oppgave 1 a) Vi har $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (-3t, 2t)$ og $\mathbf{r}'(t) = (2, -3)$, og dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^3 (-3t, 2t) \cdot (2, -3)\, dt = -\int_1^3 12t\, dt = \left[-6t^2\right]_1^3 = -48.$$

b) Vi har $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (t^5, t^2, t^4)$ og $\mathbf{r}'(t) = (1, 2t, 3t^2)$, og dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 (t^5, t^2, t^4) \cdot (1, 2t, 3t^2)\, dt = \int_0^2 t^5 + 2t^3 + 3t^6\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{6}t^6 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{3}{7}t^7\right]_0^2 = \frac{32}{3} + 8 + \frac{384}{7} = \frac{1544}{21}.$$

Oppgave 2

Vi bruker parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (5\cos t, 5\sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

for kurven $\mathcal{C}$. Da er $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (5\cos t, 5\sin t)$ og $\mathbf{r}'(t) = (-5\sin t, 5\cos t)$, og dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} (5\cos t, 5\sin t) \cdot (-5\sin t, 5\cos t)\, dt = 0.$$

Oppgave 3

Vi skriver $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$, der $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ og $\mathcal{C}_3$ er gitt ved parametriseringene

$$r_1(t) = (t, 0), \quad t \in [0, \pi],$$
$$r_2(t) = (\pi, t), \quad t \in [0, \pi],$$
$$r_3(t) = (-t, -t), \quad t \in [-\pi, 0].$$

Dermed har vi

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} (0, t) \cdot (1, 0)\, dt = 0.$$

Videre er

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi} (-\sin t, \pi) \cdot (0, 1)\, dt = \int_0^{\pi} \pi\, dt = \pi^2$$

og

$$\int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\pi}^{0} (-\cos t \sin t, -t) \cdot (-1, -1)\, dt = \int_{-\pi}^{0} t + \cos t \sin t\, dt$$
$$= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}\sin^2 t\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{2}\pi^2.$$

Til slutt får vi

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_3} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}\pi^2.$$

Oppgave 4 a) Hvis $\mathbf{F}$ står vinkelrett på $\mathbf{r}'(t)$ i ethvert punkt $\mathbf{r}(t)$, har vi at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = 0$ for alle t. Dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = 0.$$

b) Hvis $\mathbf{F}$ og $\mathbf{r}'(t)$ er parallelle, har vi at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = \lambda(t)\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}'(t) = \lambda(t)|\mathbf{r}'(t)|^2 = |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))| \cdot |\mathbf{r}'(t)| = |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))|v(t).$$

Dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_1}^{t_2} |\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))|v(t)\, dt = \int_{\mathcal{C}} |\mathbf{F}|\, ds.$$

Oppgave 5

Dersom kurven $\mathcal{C}$ er grafen til den kontinuerlig deriverbare funksjonen $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, så kan $\mathcal{C}$ beskrives ved parametriseringen

$$\mathbf{r}(t) = (t, g(t)) \qquad \text{for } t \in [a, b].$$

Da er $v(t) = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + (g'(t))^2}$, og dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} f\, ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))v(t)\, dt = \int_a^b f(t, g(t))\sqrt{1 + (g'(t))^2}\, dt.$$

Oppgave 6

Vi gjenkjenner $\mathbf{F}$ som gradienten ∇f til skalarfeltet $f(x, y, z) = x^2y + z^2/2$.

a) Kurven $\mathcal{C}$ er lukket, da $\mathbf{r}(0) = (1, 0, 0) = \mathbf{r}(2\pi)$. Dermed er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

b) Uavhengig av hvilken glatt kurve $\mathcal{C}$ fra $(0, 0, 0)$ til $(1, -2, \sqrt{2})$ vi velger, har vi at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(1, -2, \sqrt{2}) - f(0, 0, 0) = -1.$$

Oppgave 7

Alle de oppgitte vektorfeltene $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ er definert i $\mathbb{R}^2$ og har kontinuerlige partiellderiverte. Derfor er $\mathbf{F}$ konservativt hvis og bare hvis

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \quad \text{for alle } (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

i følge Teorem 3.5.7 i boka.

a) Vi har

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Altså er feltet konservativt. Ved integrasjon finner vi at $\mathbf{F} = \nabla \phi$, der ϕ er potensialfunksjonen

$$\phi(x,y) = xy^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

b) Vi har

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = x \neq y = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Altså er feltet *ikke* konservativt.

c) Vi har

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\sin y(1+2x) \neq \sin y(1+2x) = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Altså er feltet *ikke* konservativt.

Oppgave 8 a) Flaten $\mathcal{S}$ er formet som en spiral, eller skrue, sentrert om z-aksen og med radius $R = 1$ i xy-planet. Flaten er illustrert i Figur 1.

b) Enhetsnormalen $\mathbf{N}$ til $\mathcal{S}$ i et vilkårlig punkt $\Phi(r,\theta)$ har retning

$$\tilde{\mathbf{N}} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = (\sin\theta, -\cos\theta, r)$$

(se f.eks. s. 248 i læreboka). Dermed er

$$\mathbf{N} = \frac{\tilde{\mathbf{N}}}{|\tilde{\mathbf{N}}|} = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(\sin\theta, -\cos\theta, r).$$

c) En ligning for tangentplanet til $\mathcal{S}$ i punktet $\Phi(r,\theta)$ er gitt ved

$$0 = \tilde{\mathbf{N}} \cdot ((x,y,z) - \Phi(r,\theta)) = (\sin\theta, -\cos\theta, r) \cdot (x - r\cos\theta, y - r\sin\theta, z - \theta),$$

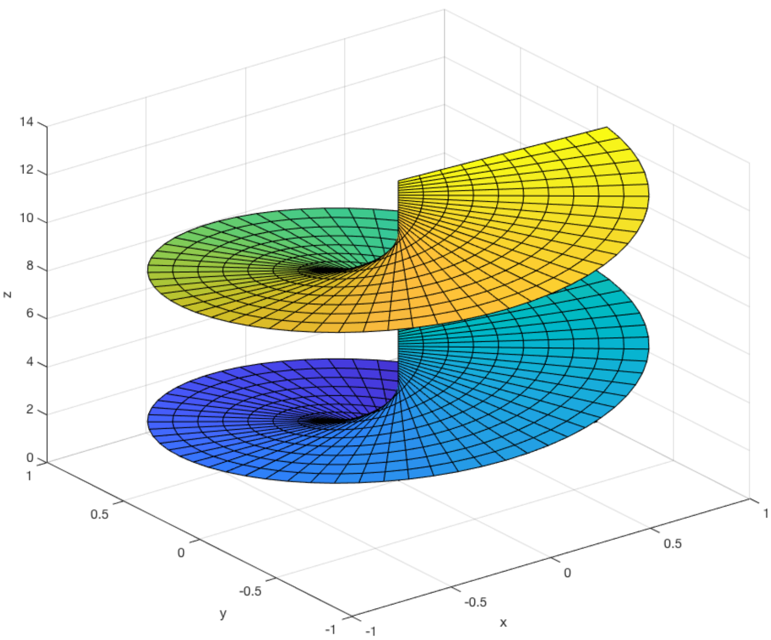
som etter litt opprydding gir

$$z = \theta - \frac{x\sin\theta}{r} + \frac{y\cos\theta}{r}.$$

Oppgave U

Anta at kurven $\mathcal{C}$ er gitt ved parametriseringen $\mathbf{r}(t)$ for $t \in [0,1]$, der $\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}(1)$. Linjeintegralet over $\mathbf{F}$ langs kurven $\mathcal{C}$ er da gitt ved

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt.$$



Figur 1: Flaten $\mathcal{S}$ i oppgave 8.

Vi vil vise at integralet $\int_\mathcal{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ har samme verdi dersom vi velger et annet punkt $\mathbf{r}(c)$, $c \in [0, 1]$, på kurven som start- og sluttpunkt. Dette svarer til om vi i stedet bruker parametriseringen

$$\tilde{\mathbf{r}}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}(t + c), & t \in [0, 1 - c] \\ \mathbf{r}(t - (1 - c)), & t \in [1 - c, 1] \end{cases}.$$

Vi får da

$$\begin{aligned} \int_\mathcal{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\tilde{\mathbf{r}}(t)) \cdot \tilde{\mathbf{r}}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{1-c} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t + c)) \cdot \mathbf{r}'(t + c)\, dt + \int_{1-c}^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t - (1 - c))) \cdot \mathbf{r}'(t - (1 - c))\, dt \\ &= \int_c^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds + \int_0^c \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds \\ &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(s)) \cdot \mathbf{r}'(s)\, ds, \end{aligned}$$

hvor vi i linje tre har brukt substitusjonene $s = t + c$ og $s = t - (1 - c)$. Vi ser at $\int_\mathcal{C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ får samme verdi uavhengig av hvilket punkt $\mathbf{r}(c)$ vi velger som start- og sluttpunkt for $\mathcal{C}$.

Til slutt husker vi fra Setning 3.4.5 i boka at for to ekvivalente parametriseringer $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ av kurven

$\mathcal{C}$, får integralet $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ samme verdi hvis $\mathbf{r}_1$ og $\mathbf{r}_2$ har samme orientering. Altså er det tilstrekkelig å sjekke påstanden for den valgte parametriseringen $\mathbf{r}$.