MA1103 Flerdimensjonal analyse, vår 2018

Løsningsskisse øving 11

Oppgave 1 a) La $F_1(x,y) = x^2 + y$ og $F_2(x,y) = x^2y$, og la R være kvadratet med hjørner i $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ og $(0,2)$. Ved Greens teorem har vi at

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy \\ &= \int_0^2 \int_0^2 (2xy-1)\,dx\,dy \\ &= \int_0^2 (4y-2)\,dy = 4.\end{aligned}$$

b) La $F_1(x,y) = x^2y + xe^x$ og $F_2(x,y) = xy^3 + e^{\sin y}$, og la R være området avgrenset av parabelen $y = x^2$ og linjestykket med endepunkter $(-1,1)$ og $(2,4)$. Vi har da

$$R = \{(x,y) \mid -1 \le x \le 2, x^2 \le y \le 2+x\}.$$

Ved Greens teorem har vi at

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dx\,dy \\ &= \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} \left(y^3 - x^2\right) dy\,dx \\ &= \int_{-1}^2 \left(\frac{1}{4}(x+2)^4 - x^2(x+2) - \frac{1}{4}x^8 + x^4\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{20}(x+2)^5 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{36}x^9 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^2 = \frac{135}{4}\end{aligned}$$

Oppgave 2

Ifølge Korollar 6.5.4 i læreboka er arealet avgrenset av kurven $\mathcal{C}$ (parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$) gitt ved

$$\begin{aligned}A &= \frac{1}{2}\int_{\mathcal{C}} -y\,dx + x\,dy \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} -y(t)x'(t) + x(t)y'(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(-b\sin^3 t\cdot 3a\cos^2 t(-\sin t) + a\cos^3 t\cdot 3b\sin^2 t\cos t\right) dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 3ab\sin^2 t\cos^2 t\,dt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi} (1-\cos^2 2t)\,dt \\
&= \frac{3ab}{8}\int_0^{2\pi} \left(1-\frac{1}{2}(1+\cos 4t)\right)\,dt = \frac{3\pi ab}{8},
\end{aligned}
$$

hvor vi gjentatte ganger har brukt identitetene

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \qquad \text{og} \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Oppgave 3

La $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2$ være den stykkevis glatte kurven hvor $\mathcal{C}_1$ er den oppgitte sykloidebuen orientert fra venstre mot høyre, og $\mathcal{C}_2$ er det rette linjestykket fra $(2\pi a, 0)$ til $(0,0)$. Da er $\mathcal{C}$ en lukket kurve med *negativ* orientering, og det følger av Korollar 6.5.4 at arealet begrenset av $\mathcal{C}$ er gitt ved

$$A = \int_{\mathcal{C}} y\,dx = \int_{\mathcal{C}_1} y\,dx + \int_{\mathcal{C}_2} y\,dx = \int_{\mathcal{C}_1} y\,dx.$$

(Her har vi brukt at $y=0$ på hele $\mathcal{C}_2$.) Vi får at

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{C}_1} y\,dx = \int_0^{2\pi} y(\theta)x'(\theta)\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a^2(1-\cos\theta)^2\,d\theta = a^2\int_0^{2\pi}(1+\cos^2\theta)\,d\theta \\
&= a^2\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\right)\,d\theta = 3a^2\pi.
\end{aligned}
$$

(Her har vi brukt at $\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta = 0$.)

Oppgave 4 a) Vi kompletterer kvadratene i x og y, og ser dermed at

$$9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y = 11$$

kan skrives som

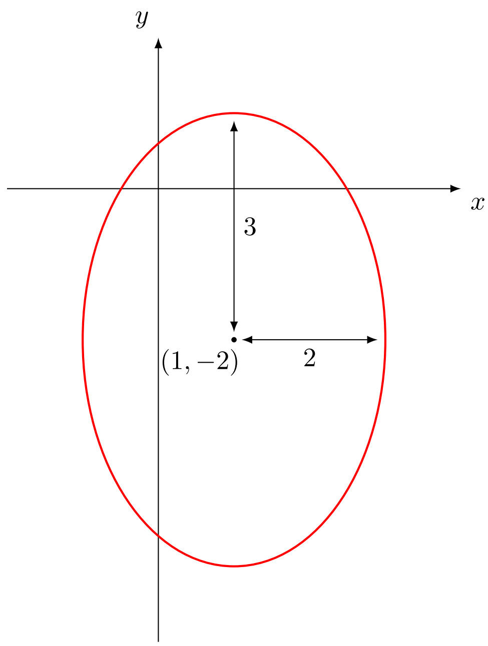
$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+2}{3}\right)^2 = 1. \tag{1}$$

Dette kjenner vi som ligningen for en ellipse med sentrum i $(1,-2)$, hvor korte halvakse har lengde 2 og lange halvakse har lengde 3. Ellipsen er skissert i Figur 1.

b) Vi setter inn $x(t) = 1 + 2\cos t$ og $y(t) = -2 + 3\sin t$ i ligning (1), og får at

$$\left(\frac{x(t)-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y(t)+2}{3}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Dette viser at kurven parametrisert ved $\mathbf{r}(t)$ er inneholdt i ellipsen med ligning (1). Vi observerer



Figur 1: Ellipsen i oppgave 4.

samtidig at for $t \in [0, 2\pi)$ gir parametriseringen $\mathbf{r}(t)$ *hele* ellipsen. Vi får dermed

$$\begin{aligned} I = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big((-2 + 3\sin t)^2, 1 + 2\cos t\big) \cdot (-2\sin t, 3\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} -2\sin t(-2 + 3\sin t)^2 + 3\cos t(1 + 2\cos t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 24\sin^2 t + 6\cos^2 t\, dt, \end{aligned}$$

der vi har brukt at odde potenser av $\sin t$ og $\cos t$ integrert over intervallet $[0, 2\pi]$ er null. Vi får videre

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} 24\sin^2 t + 6\cos^2 t\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 6 + 18\sin^2 t\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 6 + 9(1 - \cos 2t)\, dt \\ &= \left[15t - \frac{9}{2}\sin 2t\right]_0^{2\pi} = 30\pi. \end{aligned}$$

c) Vi ser at

$$\iint_R (1-2y)\,dxdy = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right),$$

der $\mathbf{F} = (y^2, x)$. Det følger dermed fra Greens teorem at

$$\iint_R (1-2y)\,dxdy = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = 30\pi.$$

Oppgave 5

Anta at $\mathcal{C}$ er en enkel, lukket, stykkevis glatt kurve i $\mathbb{R}^2$, og la R være området avgrenset av $\mathcal{C}$. Dersom vektorfeltet $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$ er konservativt, finnes det en potensialfuksjon ϕ med kontinuerlig gradient, slik at

$$\nabla\phi = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}\right) = (F_1, F_2).$$

Dermed har vi

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x} = 0,$$

da de blandede partiellderiverte må være like. Det følger nå fra Greens teorem at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \iint_R \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\,dxdy = 0.$$

Oppgave 6

Vi har at

$$\text{areal}(D) = \iint_D 1\,dxdy.$$

Om vi definerer vektorfeltet $\mathbf{F} = (0, x)$, har vi at

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1,$$

og det følger derfor fra Greens teorem at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} (0,x)\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\,dxdy = \iint_D 1\,dxdy.$$

Dette verifiserer at

$$\text{areal}(D) = \int_{\mathcal{C}} (0,x)\cdot d\mathbf{r}.$$

Likeledes kan vi sette $\mathbf{F} = (-y, 0) = -(y, 0)$. Vi får igjen

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1,$$

og det følger fra Greens teorem at

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}} (y,0)\cdot d\mathbf{r} = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\,dxdy = \iint_D 1\,dxdy.$$

Dermed får vi

$$\text{areal}(D) = \int_{\mathcal{C}} (0,x)\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathcal{C}} (y,0)\cdot d\mathbf{r}.$$

Oppgave 7

Dette er eksempel 6.5.8 i boka, og er grundig gjennomgått på s. 612–614. Vær oppmerksom på trykkfeilen i ligning (6.5.1); her skal siste integral være over $\mathcal{C}_r$, og det skal ikke stå r foran P i integranden.

Oppgave 8

Vi får

$$\begin{aligned}\iiint_A (xy+z)\,dxdydz &= \int_0^1 \int_0^2 \int_0^{x^2 y} (xy+z)\,dzdydx \\ &= \int_0^1 \int_0^2 \left(x^3y^2 + \frac{1}{2}x^4y^2\right) dydx \\ &= \int_0^1 \left(x^3 + \frac{1}{2}x^4\right) \int_0^2 y^2\,dydx \\ &= \frac{8}{3}\left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5\right]_0^1 = \frac{14}{15}.\end{aligned}$$

Oppgave 9

La $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$. Vi gjør et variabelskifte til kulekoordinater, og får da

$$I = \iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_D f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\,d\rho d\phi d\theta,$$

der

$$D = \{(\rho,\phi,\theta) \mid 0 \le \rho \le 2, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

Vi ser at

$$f(\rho\sin\phi\cos\theta, \rho\sin\phi\sin\theta, \rho\cos\phi) = |\rho\sin\phi|,$$

og fordi $\rho\sin\phi \ge 0$ for alle $(\rho,\phi,\theta) \in D$ kan vi se bort fra absoluttverditegnene i den videre utregningen. Vi får

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^2 \rho^3 \sin^2\phi\,d\rho d\phi d\theta \\ &= 2\pi \cdot \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 \cdot \int_0^{\pi} \sin^2\phi\,d\phi = 4\pi^2.\end{aligned}$$

Oppgave U

Vi bruker for enkelhets skyld notasjonen $\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y)$. Dersom randa ∂D til D er orientert mot klokka, og enhetstangenten til ∂D er $\hat{\mathbf{T}} = (T_1, T_2)$ i et gitt punkt på ∂D, så vil nødvendigvis den utadrettede enhetsnormalen $\hat{\mathbf{N}}$ til ∂D i samme punkt være gitt ved $\hat{\mathbf{N}} = (T_2, -T_1)$. Dermed har vi at

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \phi\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{N}}\,ds &= \int_{\partial D} \phi(\phi_x, \phi_y) \cdot (T_2, -T_1)\,ds \\ &= \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{T}}\,ds = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r},\end{aligned}$$

der $\mathbf{F}$ er vektorfeltet $\mathbf{F} = \phi(-\phi_y, \phi_x)$. Det følger nå fra Greens teorem at

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dx\, dy \\ &= \iint_D \left(\frac{\partial}{\partial x}(\phi\phi_x) - \frac{\partial}{\partial y}(-\phi\phi_y) \right) dx\, dy = \iint_D \nabla \cdot (\phi\nabla\phi)\; dx\, dy.\end{aligned}$$

Vi har altså at

$$\int_{\partial D} \phi\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_D \nabla \cdot (\phi\nabla\phi)\; dx\, dy.$$

(Dette er et spesialtilfellet av det som gjerne kalles *divergensteoremet i planet*.) Til slutt observerer vi at

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\phi\nabla\phi) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi\phi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi\phi_y) \\ &= (\phi_x)^2 + \phi\phi_{xx} + (\phi_y)^2 + \phi\phi_{yy} \\ &= \phi\nabla^2\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi,\end{aligned}$$

der

$$\nabla^2\phi = \nabla \cdot \nabla\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy}.$$

Altså har vi at

$$\int_{\partial D} \phi\nabla\phi \cdot \hat{\mathbf{N}}\, ds = \iint_D \left(\phi\nabla^2\phi + \nabla\phi \cdot \nabla\phi\right) dx\, dy.$$