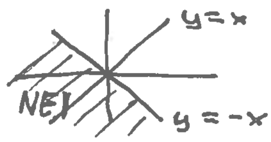
LØSNINGS-SKISSER 2. ØVING

Meld fra om feil! KH

2.1 #1 a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

b) f definert når $x^2 - y^2 \neq 0$, dvs. i hele $\mathbb{R}^2$ bortsett fra når $y = \pm x$.



c) $\ln(x+y)$ definert når $x+y > 0 \Leftrightarrow y > -x$

2.2

#3 $\varepsilon > 0$ gitt. Skal finne $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ s.a.

$$\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |k_i(x) - k_i(x_0)| < \varepsilon$$

Da $k_i(x) = x_i$, $k_i(x_0) = x_{0i}$ og

$$\|x - x_0\| = \sqrt{(x_1 - x_{01})^2 + \cdots + (x_i - x_{0i})^2 + \cdots + (x_n - x_{0n})^2}$$
$$= \sqrt{(k_1(x) - k_1(x_0))^2 + \cdots + (k_i(x) - k_i(x_0))^2 + \cdots + (k_n(x) - k_n(x_0))^2}$$

ser vi at $\delta = \varepsilon$ fungerer (og for alle k_i-ene samtidig)!

#1 a) $f(x,y) = k_1(x,y) + k_2(x,y)$; sum av to kont. fu. k_1, k_2 er kont. ved Setn. 2.2.2.

b) $f(x,y) = k_1(x,y)^2 k_2(x,y) + k_2(x,y)$; kont ved Setn 2.2.2 da k_1, k_2 kont.

#2 a)

$$F_1(x,y,z) = x^2 z + y = k_1(x,y,z)^2 k_3(x,y,z) + k_2(x,y,z)$$

kont. som over ved Setn. 2.2.2.

F er da kont. ved Setn. 2.2.4

b) Tilsv.

2.2 forts

#4 a) Har $\|F(x)-F(y)\| \le M\|x-y\|$; $x,y \in D_F$
$M \ge 0$
F er kont. da $\varepsilon > 0$ gitt kan pareres med $\delta = \varepsilon/M$ når $M > 0$. (For $M = 0$ fungerer alle δ.)

#5

a) $\|(x-y)+y\| \underset{TU}{\le} \|x-y\| + \|y\|$

$$\|x\| - \|y\| \le \|x-y\|$$

$x=y$, $y=x$

$$\|y\| - \|x\| \le \|y-x\| = \|x-y\|$$

(*) $\boxed{\big|\|x\|-\|y\|\big| \le \|x-y\|}$

b) $f(x) = \|x-a\|$ er kontinuerlig:
La x_0 vilk. i $\mathbb{R}^n$. Har

$$|f(x)-f(x_0)| = \big|\|x-a\| - \|x_0-a\|\big| \underset{(*)}{\le} \|x-x_0\|$$

Altså er f kont. i x_0: $\varepsilon>0$ gitt, kan velge $\delta<\varepsilon$.

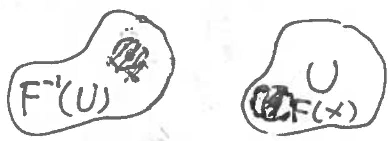
c) Kan henvise til Setn 2.2.2:
$F(x) = 1$ opplagt kont. ($\varepsilon>0$ gitt, alle $\delta>0$ passer)

Oppg 7 Noen STIKKORD/TEGNINGER

- Observer $B_\varepsilon(x)$ er en åpen mengde!

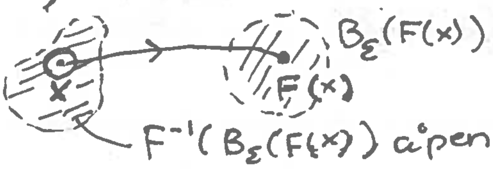
- Å vise: $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ kont $\Leftrightarrow$ $F^{-1}(U)$ er en åpen mengde når U åpen

$\Rightarrow$)



$x \in F^{-1}(U)$ betyr at $F(x) \in U$. U er åpen slik at $B_\varepsilon(F(x)) \subset U$, passende ε. Kontinuitet gir δ slik at $F(B_\delta(x)) \subset B_\varepsilon(F(x))$; $F^{-1}(U)$ åpen.

$\Leftarrow$) Gitt $\varepsilon>0$. (Vil finne δ)



Da $F^{-1}(B_\varepsilon(F(x)))$ åpen, fins det en δ-ball om x i mengden. Denne avbildes innenfor $B_\varepsilon(F(x))$. ■