Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 4

Oppgave 1 (2.5: 1)

Regn ut de annenordens partiellderiverte til funksjonene:

a) $f(x, y) = 3x^2y + 2y^2x$

b) $f(x, y) = x\sin(y)$

Oppgave 2 (Eksamen 05/2013 Oppgave 1)

Fra fysiske lover kan en se at om K er et homogent legeme i $\mathbb{R}^3$, så må temperaturen $T = T(x, y, z, t)$ i K være en løsning til *varmelikningen*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)$$

der (x, y, z) er posisjonen i legemet, t er tiden, og k er en materialkonstant. Vis at $T(x, y, z, t) = 2x - y + z$ er en løsning til varmelikningen.

Oppgave 3 (2.5: 2)

Regn ut de partiellderiverte:

a) $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z \partial x}$ når $f(x, y, z) = x^2 y e^{xz}$

b) $\frac{\partial^4 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z}$ når $f(x, y, z) = x^2y^3\cos(xyz)$

Oppgave 4 (2.7: 1)

La $f(u, v) = u^2 + v$, $g(x, y) = 2xy$, $h(x, y) = x + y^2$. Bruk kjerneregelen til å finne de partiellderiverte av $k(x, y) = f(g(x, y), h(x, y))$.

Oppgave 5 (2.7: 5)

Vi har to derivarbare funksjoner $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$. Anta at $\mathbf{G}(1, -2) = (1, 2, 3)$ og at

$$\mathbf{G}'(1, -2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{F}'(1, 2, 3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Finn Jacobi-matrisen til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(\mathbf{x}))$ i punktet $(1, -2)$.

Oppgave 6 (2.6: 1)

Finn Jacobi-matrisen til funksjonene.

a) $\mathbf{F}(x, y) = (x^2y, x + y^2)$.

b) $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^{x^2y+z}, xyz^2)$.

Oppgave 7 (2.5: 4)

I denne oppgaven skal vi se på en funksjon $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ slik at $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}(0,0)$. Funksjonen er gitt ved

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} & \text{når} \quad (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{når} \quad (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Vis at $f(x,0)=0$ for alle x og at $f(0,y)=0$ for alle y. Bruk dette til å vise at $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$.

b) Vis at for $(x,y)\neq(0,0)$ er

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{x(y^4+4x^2y^2-x^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

c) Vis at $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=-1$ ved å bruke

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h}.$$

Vis på tilsvarende måte at $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=1$.

Oppgave 8 (2.7: 8)

Temperaturen T i et område avhenger av posisjonen; vi kan tenke oss at den er gitt som en deriverbare funksjon $T=f(x,y)$ av to variable der x og y er vanlige korrdinater. Vi innfører nå polarkoordinater r og θ på vanlig måte slik at $x=r\cos(\theta), y=r\sin(\theta)$. Vi får da temperaturen som en funksjon $T(r,\theta)=f(r\cos(\theta),r\sin(\theta))$ av r og θ.

a) Vis at

$$\frac{\partial T}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta),$$
$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos(\theta).$$

b) En radiomerket fugl beveger seg i området. Radiosignalene viser hvordan avstanden r og vinkelen θ varierer med tiden; vi har $r=g(t)$ og $\theta=h(t)$. Vis at temperaturendringene fuglen opplever er gitt ved

$$T'(t)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\theta)\right)g'(t)+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}r\sin(\theta)+\frac{\partial f}{\partial y}r\cos(\theta)\right)h'(t)$$

der vi må sette inn $r=g(t),\theta=h(t),x=g(t)\cos(h(t)),y=g(t)\sin(h(t))$.