Flerdimensjonal analyse (MA1103)

Øving 10

Oppgave 1 (5.10: 1)

Finn maksimums-og minimumspunktene (hvis de finnes) til funksjonen f under bibetingelsen.

a) $f(x, y) = 4x - 3y$ når $x^2 + y^2 = 1$.

b) $f(x, y) = xy$ når $9x^2 + y^2 = 18$.

Oppgave 2 (5.10: 3)

Finn punktene på skjæringkurven mellom flatene $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1$ som ligger nærmest origo.

Oppgave 3 (6.1: 1)

Regn ut dobbeltintegralene

i) $\iint_R xy \, d(x, y)$ der $R = [1, 2] \times [2, 4]$

ii) $\iint_R x \cos(xy) \, d(x, y)$ der $R = [1, 2] \times [\pi, 2\pi]$

Oppgave 4 (6.1: 7)

Anta at $f : R \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon på et rektangel $R = [a, b] \times [c, d]$. Vis at det finnes et punkt $(\bar{x}, \bar{y})$ i R slik at

$$\frac{\iint_R f(x, y) \, d(x, y)}{|R|} = f(\bar{x}, \bar{y})$$

der $|R|$ er arealet til R. Dettes kalles ofte *middelverdisetningen for dobbeltintegraler*.

Oppgave 5 (6.2: 1)

Regn ut dobbeltintegralene

i) $\iint_R y \, d(x, y)$ der $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2 \text{ og } y \leq x \leq y^2\}$

ii) $\iint_R x^2 y \, d(x, y)$ der R er området avgrenset av kurvene $y = x^2$ og $y = \sqrt{x}$

Oppgave 6 (6.2: 3)

Noen integraler er enklere å regne ut hvis vi bytter integrasjonsrekkefølgen. Løs disse integralene ved å utføre integrasjonene i motsatt rekkefølge. (*Hint:* Lag en skisse over integrasjonsområdet før du prøver å bytte integrasjonsrekkefølgen.)

i) $\int_0^1 \left[\int_y^1 e^{x^2}\, dx\right] dy$

ii) $\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y^2}}\, dy\right] dx$

Oppgave 7 (6.2: 4)

Vis at verdien til $\iint_A f(x,y)\, d(x,y)$ ikke avhenger av hvilket rektangel R vi bruker i definisjonen.

Oppgave 8 (6.7: 3 a))

Regn ut $\iint_R xy\, d(x,y)$ der R er området avgrenset av linjene $x+2y=-1$, $x+2y=3$, $x=y+1$, $x=y+4$. Bruk substitusjonen $u=x+2y$, $v=x-y$.

Oppgave 9 (***A*** 5.10: 20)

I denne oppgaven er A en symmetrisk $n\times n$-matrise med koeffisienter $(a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ og $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ er funksjonen $f(\mathbf{x})=(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{x}$.

a) Vis at dersom $\mathbf{x}$ er en egenvektor for A med egenverdi λ, så er $f(\mathbf{x})=\lambda\|\mathbf{x}\|^2$.

b) Vis at for alle vektorer $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ er

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=1}^n a_{ii}x_i^2+2\sum_{i\neq j}a_{ij}x_ix_j,$$

der den siste summen er over alle par av ulike indekser $1\le i,j\le n$.

c) La $S:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|=1\}$ være det n-diemnsjonale kuleskallet om origo med radius 1. Forklar at når vi innskrenker f til S, så har funksjonen maksimums- og minimumspunkter. Bruk Lagranges multiplikatormetode til å vise at disse maksimums-og minimumspunktene er egenvektorer til A. Vis til slutt at maksimumsverdien til f på S er den største egenverdien til A, mens minimumsverdien er den minste egenverdien til A. Denne observasjonen brukes ofte til å finne egenvektorer numerisk.

A: Denne oppgave er en ekstra oppgave (frivillig), som er litt mer teoretisk eller omfangsrik.

Oppgavene finnes i boka *Flervariabel analyse med lineær algebra* av T.Lindstrøm og K.Hveberg. Se henvisningen i parentes.