NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1103 Flerdimensjonal analyse**

Faglig kontakt under eksamen: Gabriele Bruell

Tlf: 40336873

Eksamensdato: 07. juni 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemte, enkle kalkulatorer tillatt.

Annen informasjon:
Alle svar skal begrunnes. Det skal være med så mye mellomregning at framgangsmåten går tydelig fram. To lister med formler er vedlagt på siste sider av eksamenspapirene.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 3

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1 La

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{når } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{når } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Forklar hvorfor f ikke er deriverbar i $(0,0)$, men de partielle deriverte $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ eksisterer.

Oppgave 2 Anta at en flue beveger seg langs en kurve C i $\mathbb{R}^3$ slik at posisjonen til flua er gitt ved $\mathbf{c}(t) = \left(t, \frac{2}{3}\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}, \frac{1}{2}t^2\right)$ ved tiden $t \in [0, \infty)$.

a) Hvis flua starter å fly ved $t = 0$ og farten er gitt i meter per sekund, hvor mange meter tilbakelegger flua i løpet av 10 sekunder?

b) La $T(x,y,z) = x^2 + xz + y$ være temperaturen i punktet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Finn $\frac{dT}{dt}(\mathbf{c}(t))$, temperatur endringen, flua vil oppleve ved tiden $t = 1$.

Oppgave 3

a) Finn og klassifiser alle kritiske punkter av $f(x,y) = 2x^2 + 4xy + y^4$.

b) Hvor oppnår $f(x,y) = (x-y)^2$ sitt maksimum og minimum når $x^2 + y^2 = 2$?

Oppgave 4 La D være et område i første kvadrant $(x \geq 0, y \geq 0)$ begrenset av $x = 0, y = 0$ og $y = \sqrt{1-x^2}$. Beregn integralet av $f(x,y) = x^2 + y^2$ over D.

Oppgave 5 La $\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy, x^2, z)$. Beregn linjeintegralet

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s},$$

når

i) C er kurven parametrisert ved $\mathbf{c} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{c}(t) = (\cos(t), \sin(2t), \sin^2(t))$.

ii) C er en vilkårlig glatt kurve med startpunkt $(0,0,0)$ og endpunkt $(1, -2, \sqrt{2})$.

Hint: Vis at $\mathbf{F}$ er et konservativt felt.

Oppgave 6 Med definisjonen $\nabla^2 := \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, kalles en C^2–funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ som tilfredsstiller ligningen

$$\nabla^2 f = 0$$

for *harmonisk.*
Vis at for et vilkårlig reelt tall k er funskjonen $f(x, y) = e^{kx} \cos(ky)$ harmonisk.

Oppgave 7 La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være en skalar C^2–funksjon og $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ et C^1–vektorfelt. La $W \subset \mathbb{R}^3$ være et område der Gauss' teorem gjelder og ∂W overflata til W.

a) Vis at $\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \nabla f \cdot \mathbf{F}$ og derfor

$$\iint_{\partial W} f\mathbf{F} \cdot n \, dS = \iiint_W f \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV + \iiint_W \nabla f \cdot \mathbf{F} \, dV.$$

b) Anta at

$$\begin{cases} \nabla^2 f(x, y, z) = 0 & \text{når} \quad (x, y, z) \in W, \\ f(x, y, z) = 0 & \text{når} \quad (x, y, z) \in \partial W. \end{cases}$$

Vis at $f(x, y, z) = 0$ for alle $(x, y, z) \in W$.
Hint: La $\mathbf{F} = \nabla f$ og bruk a).

FORMELLISTE FOR
MA1103 FLERDIMENSJONAL ANALYSE

Diskriminanten i annenderiverttesten:

$$\Delta = AC - B^2 \quad \text{der} \quad A = f_{xx}, \quad B = f_{xy} \quad C = f_{yy}$$

Variabelskifteformler:

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \qquad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w$$

Sylinderkoordinater (r, θ, z):

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z,$$

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = r\ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

Kulekoordinater (ρ, φ, θ):

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\varphi,$$

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \rho^2\sin\varphi\ \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

Flateintegral:

$$\mathrm{d}S = \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Spesialtilfelle: $\mathrm{d}S = \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Tyngdepunkt for romlige legemer:

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint_T x\,\mathrm{d}m, \quad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint_T y\,\mathrm{d}m, \quad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint_T z\,\mathrm{d}m$$

Vektoranalyse:

Greens teorem: $\displaystyle\int_{\partial D} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Stokes' teorem: $\displaystyle\int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{s} = \iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$

Divergensteoremet: $\displaystyle\iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{\partial W} (\mathbf{F}\cdot\mathbf{n})\,\mathrm{d}S = \iiint_W (\operatorname{div}\mathbf{F})\,\mathrm{d}V$

List of formulas for MA1103 Vector Calculus 2016

Change of variables formula.

$$\iint_D f(x,y)\,d(x,y) = \iint_{D^*} f(T(u,v))|\det(\mathbf{D}T(u,v))|\,d(u,v),$$

where $T : D^* \to D$.

Change of variables formula for polar coordinates.

$$\iint_D f(x,y)\,d(x,y) = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,d(r,\theta).$$

Change of variables formula for cylindrical coordinates.

$$\iiint_W f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \iiint_{W^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,d(r,\theta,z).$$

Change of variables formula for spherical coordinates.

$$\iiint_W f(x,y)\,d(x,y) = \iiint_{W^*} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\phi) r^2 \sin\phi\,d(r,\theta,\phi).$$

Integrals over curves. Let C be a curve parameterized by $c : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

Path integral. $f : C \to \mathbb{R}$

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(c(t))\|c'(t)\|\,dt.$$

Line integral. $\mathbf{F} : C \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$\int_C \mathbf{F}\,d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F}(c(t))c'(t)\,dt.$$

Integrals over surfaces. Let S be a surface parameterized by $\Phi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$.

Integral of scalar valued function. $f : S \to \mathbb{R}$

$$\int_S f\,dS = \iint_D f(\Phi(u,v))\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|\,d(u,v).$$

Integral of vector field. $\mathbf{F} : S \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\int_S \mathbf{F}\cdot\,d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F}(\Phi(u,v))(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,d(u,v),$$

where $\mathbf{T}_u := \frac{\partial\Phi}{\partial u}$ and $\mathbf{T}_v := \frac{\partial\Phi}{\partial v}$.

Green's Theorem.

$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) d(x,y) = \int_{\partial D} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Stokes' Theorem.

$$\iint_S (\operatorname{curl}\mathbf{F})\cdot\,d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}.$$

Gauss' Theorem.

$$\iiint_W \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial W} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS.$$