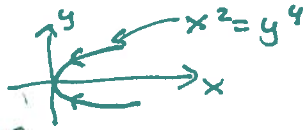
LØSNINGSFORSLAG MA1103 aug. 2015

Vanlige forbehold
K. H.

Oppgave 1

a) $f_x(0,0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\(y=0)}} \dfrac{\frac{x^2y^4}{x^4+6y^3} - 0}{x} = \underline{0}$, $f_y(0,0) = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\(x=0)}} \dfrac{f(0,y)-0}{y} = \underline{\underline{0}}$

b) Se på kurven $x^2 = y^4$:



$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^8}{(y^4)^2+6y^8} = \frac{1}{7} \neq f(0,0)$$

Dette viser at f ikke er kontinuerlig i $(0,0)$, og følgelig heller ikke deriverbar i $(0,0)$!

Oppgave 2

$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t + \sin t + t\cos t,\ \cos t - \cos t + t\sin t,\ 2t)$

$|\mathbf{r}'(t)|^2 = t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 4t^2 = 5t^2$

$$L = \int_0^{2\pi} |\mathbf{r}'(t)|\,dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{5}\,t\,dt = \sqrt{5}/2\,(2\pi)^2 = \underline{\underline{2\sqrt{5}\,\pi^2}}$$

Oppgave 3

Plannormal i $(1,0,0)$: $\left[2x - ze^{xz},\ 2y - \cos y,\ -xe^{xz}\right]_{(1,0,0)}$

$= [2, -1, -1]$

Tangentplanet i $(1,0,0)$ blir da

$2(x-1) - 1(y-0) - 1(z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - y - z = 2$

Setter vi inn $y = z = 1/10$ får vi $\underline{\underline{x = \frac{11}{10}}}$

Oppgave 4

$f(x,y) = 2x^2 - x^4 + y^2$

a) $\left.\begin{array}{l} f_x = 4x - 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x(1-x^2) = 0 \\ f_y = 2y = 0 \Leftrightarrow y = 0 \end{array}\right\}$ Kritiske punkter $\underline{\underline{(0,0),\ (\pm 1, 0)}}$

$\left.\begin{array}{l} A = f_{xx} = 4 - 12x^2;\ B = f_{xy} = 0 \\ C = f_{yy} = 2 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} AC - B^2 = 8(1-3x^2). \\ C > 0 \end{array}$ Altså:

$\underline{\underline{(0,0) \text{ er et lokalt minimum, } (\pm 1, 0) \text{ er sadelpunkter.}}}$

b) Vil bruke LMM med $g(x,y) = x^4+y^2$ og ser på

$$(4x-4x^3,\ 2y) = \lambda(4x^3,\ 2y),\quad x^4+y^2=4, \text{ eller}$$

$$(1)\quad 4x-4x^3 = \lambda\, 4x^3$$

$$(2)\quad 2y = \lambda\, 2y \iff y(1-\lambda)=0 \iff \underline{y=0} \text{ eller } \underline{\lambda=1}$$

$$(3)\quad x^4+y^2=4$$

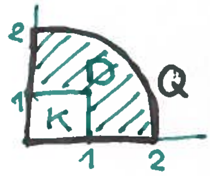
$\underline{y=0}$: Av (3) $x^4 = 4$ slik at $f(x,y) = \boxed{0}$

$\underline{\lambda=1}$: Av (1) følger $x-2x^3=0 \iff x(1-2x^2)=0$

$x=0$ gir $f = \boxed{4}$ mens $x^2=\frac{1}{2}$ gir $f = 2\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+4-\frac{1}{4} = \boxed{\frac{9}{2}}$

Kurven $x^4+y^2=4$ er en lukket, begrenset mengde, og f er kontinuerlig, slik at f oppnår både maksimum og minimum på kurven. Blant $\square$! $f_{min} = \underline{\underline{0}}$, $f_{maks} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}}$

Oppgave 5. Ser på integralet over kvartsirkelskiva Q og kvadratet K og trekker fra hverandre:



$$\iint_Q (2x+y^2)\,dA = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 (2r\cos\theta + r^2\sin^2\theta)\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2}{3}\, 2^3\cos\theta + \frac{1}{4}\, 2^4 \sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \underline{16/3 + \pi}$$

$$\iint_K (2x+y^2)\,dA = \int_0^1\int_0^1 (2x+y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 (1+y^2)\,dy = 1+\frac{1}{3} = \underline{\frac{4}{3}}$$

Altså er $\iint_D (2x+y^2)\,dA = 16/3+\pi-4/3 = \underline{\underline{4+\pi}}$

Oppgave 6

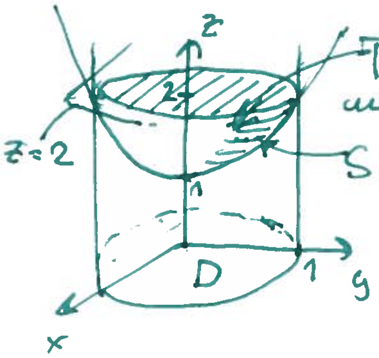
$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ 3x^2y & x^3+y^3 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 0,\ 3x^2-3x^2) = \underline{(0,0,0)}, \text{ så curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}.$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y \Rightarrow f = x^3y + k(y,z)$ slik at vi må ha

$\frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + \frac{\partial k}{\partial y} = x^3+y^3$; $k(y,z) = \frac{1}{4}y^4$ fungerer, og

$\underline{\underline{f = x^3y + \frac{1}{4}y^4 \text{ passer}}}$

Oppgave 7



a) Massen $M = \iint_D \int_{1+x^2+y^2}^{2} dz \; dA$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 [2-(1+r^2)]r\,dr\,d\theta$$

$$= \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right]_0^1 \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}$$

Koordinatene til tyngdepunktet: $\bar{x} = \bar{y} = \underline{\underline{0}}$ ved symmetri.

$\bar{z}$:

$$M_z = \iint_D \int_{1+x^2+y^2}^{2} z\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \tfrac{1}{2}\left[2^2-(1+r^2)^2\right]r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\pi\left[r^2 - \tfrac{1}{2}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{2}{4}r^4+\frac{r^6}{6}\right)\right]_0^1$$

$$= 2\pi - \pi\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{2}{4}+\tfrac{1}{6}\right) = \underline{\frac{5}{6}\pi}$$

$$\bar{z} = \frac{M_z}{M} = \frac{5\pi\cdot 2}{6\cdot\pi} = \underline{\underline{\frac{5}{3}}}$$

b)

Vil bruke divergensteoremet. (Da kan vi få benyttet betingelsen $f_x + x g_y = 0$.) Har

$\underline{\operatorname{div}\bar{F}} = f_x + x g_y + 1 = \underline{1}$. Fra a) $\underline{V} = M = \underline{\frac{\pi}{2}}$ da $\delta = 1$.

Altså gjelder

$$\frac{\pi}{2} = \iiint_V 1\,dV \underset{DT}{=} \iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} + \iint_{\substack{\text{Topp}\\ z=2}} \bar{F}\cdot\bar{k}\,dA$$

$$\iint_S \bar{F}\cdot d\bar{S} = \frac{\pi}{2} - \iint_D 2\,dA$$

$$= \frac{\pi}{2} - 2\pi\cdot 1^2 = \underline{\underline{-\frac{3\pi}{2}}}$$